HOJA DE EJERCICIOS - PROBABILIDAD

Enunciados

1. Un experimento aleatorio consiste en sacar una carta de una baraja española de 40 cartas.

   (a) Determina el espacio muestral

   (b) Encuentra dos sucesos compatibles, dos incompatibles, un suceso seguro y otro imposible.

   (c) Considera los sucesos 'sacar oros' y 'sacar figura' y calcula su unión, su intersección y sus complementarios

   (d) Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

   - Sacar oros
   - Sacar una figura
   - Sacar una figura de oros
   - Sacar oros o una figura
   - Sacar la sota de oros
   - Sacar una carta que no sea una figura de oros

Ir a solución

2. Se lanza un dado con 12 caras numeradas del 1 al 12 y se consideran los sucesos:

   - A = 'salir par'
   - B = 'salir impar'
   - C = 'salir un nº múltiplo de 3'
   - D = 'salir un nº múltiplo de 5'
   - F = 'salir un nº mayor que 5'
   - G = 'salir un nº menor o igual que 4'
   - H = 'salir un nº que no sea múltiplo de 5'
   - I = 'salir un nº primo'

   (a) Escribe estos sucesos.

   (b) Señala los pares de sucesos que son incompatibles.

   (c) ¿Hay tres sucesos que sean incompatibles?

   (d) Considera los sucesos A y C y calcula $A \cup C$, $A \cap C$, $\bar{A} \cap C$, $\overline{A \cup C}$ y $\overline{A \cap C}$. Trata de describir con palabras estos sucesos.

   (e) Asumiendo que el dado es justo, calcula la probabilidad de que salga un número entre el 5 y el 9 (incluidos). Calcula también las probabilidades de todos los sucesos A al I

   (f) Supongamos que el dado está trucado de tal modo que el 12 tiene un 50% de probabilidades de salir y el resto tienen la misma probabilidad. Calcula $\mathcal{P}(3)$ y las probabilidades de todos los sucesos A al I

Ir a solución

3. Un experimento consiste en el lanzamiento de tres monedas

   (a) Determina el espacio muestral en los dos casos siguientes

- Apuntamos el resultado de cada lanzamiento
- Sólo apuntamos el número de caras

Razona si cada uno de estos espacios muestrales está compuesto de sucesos elementales equiprobables

(b) Considera los siguientes sucesos

- $A =$ 'sacar al menos una cara'
- $B =$ 'sacar una sola cara'
- $C =$ 'sacar al menos dos cruces'

Determina y describe los sucesos $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ y todos los pares de intersecciones de A, B y C.

(c) Suponiendo que la moneda no está trucada, calcula la probabilidad de A, B y C

(d) Si la moneda está trucada de tal modo que sale cara un 60% de las veces, calcula la probabilidad de sacar tres caras, de sacar tres cruces, y de los sucesos A y C

Ir a solución

4. De 500 habitantes, 350 leen la prensa escrita habitualmente y 300 ven las noticias en televisión. Sabemos que un 35% del total hace las dos cosas. Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar:

   (a) No vea las noticias ni lea la prensa
   (b) Vea las noticias, pero no lea la prensa
   (c) Vea las noticias, sabiendo que lee la prensa.
   (d) No vea las noticias, sabiendo que lee la prensa.

Ir a solución

5. Se sabe que en un centro de enseñanza el 30% de los alumnos aprueban la asignatura A, el 40% la asignatura B y el 5% aprueban ambas. Calcula la probabilidad de que un alumno:

   (a) Habiendo aprobado la asignatura A, apruebe la B.
   (b) Habiendo aprobado la asignatura B, apruebe la A.
   (c) No habiendo aprobado la asignatura A, apruebe la B.
   (d) No habiendo aprobado la asignatura B, apruebe la A.
   (e) No habiendo aprobado la asignatura A, no apruebe la B.

Ir a solución

6. He comprado papeletas para dos sorteos de navidad que me han vendido mis sobrinos. En el primero se sortea una botella de vino, y se vendieron 100 papeletas, mientras que el segundo sortea una cesta entera de navidad y había 300 números. Calcula

   (a) La probabilidad de que me toque la cesta
   (b) La probabilidad de que me toquen ambos premios
   (c) La probabilidad de que me toque algún premio
   (d) Si ya ha ocurrido el sorteo del vino y me ha tocado, ¿cuál es la probabilidad de que también me toque la cesta?

Ir a solución

7. Se dispone de dos dados de 6 caras, cada uno de los cuales tiene un ⚀, dos ⚁ y dos ⚂. Se tiran ambos a la vez (es decir, no apuntamos en qué orden sale cada número).

   (a) ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Es de Laplace?
   (b) Calcula la probabilidad de que salgan dos treses y la de que salgan un uno y un tres
   (c) Calcula la probabilidad de que los dados sumen 4
   (d) Si el resultado suma 4, ¿cuál es la probabilidad de que uno de ellos sea un 3?

Ir a solución

8. Se tiene una bolsa que contiene bolas de colores. Concretamente

   - 2 bolas verdes
   - 4 bolas rojas
   - 1 bola amarilla

   Si se sacan dos bolas de la bolsa sin volverlas a meter, calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

   (a) Que la primera sea la amarilla y la segunda una verde
   (b) Que salga una roja y una verde (sin importar el orden)
   (c) Que salgan dos rojas
   (d) Que salgan dos bolas del mismo color
   (e) Sabiendo que salió la bola amarilla, calcula la probabilidad de que saliese la primera

Ir a solución

Soluciones

1. Un experimento aleatorio consiste en sacar una carta de una baraja española de 40 cartas.

(a) Determina el espacio muestral

El espacio muestral de este experimento es sencillamente el conjunto de todas las cartas que puede salir, es decir, tiene 40 elementos

$$E = \{1\diamondsuit, 2\diamondsuit, 3\diamondsuit, ..., S\diamondsuit, C\diamondsuit, R\diamondsuit, 1\heartsuit, ..., R\heartsuit, 1\spadesuit, ...R\spadesuit, 1\clubsuit, ..., R\clubsuit\} \tag{1}$$

(b) Encuentra dos sucesos compatibles, dos incompatibles, un suceso seguro y otro imposible.

Para encontrar ahora los sucesos que nos piden, recordemos primero que un suceso es cualquier subconjunto de E. Cada una de las cartas es un suceso elemental, pero podemos construir otros. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
A &= \text{‘Sacar oros’} = \{1\diamondsuit, 2\diamondsuit, ..., R\diamondsuit\} && (2)\\
B &= \text{‘Sacar un 3’} = \{3\diamondsuit, 3\heartsuit, 3\spadesuit, 3\clubsuit\} && (3)\\
C &= \text{‘Sacar figura’} = \{S\diamondsuit, S\heartsuit, S\spadesuit, S\clubsuit, C\diamondsuit, C\heartsuit, C\spadesuit, C\clubsuit, R\diamondsuit, R\heartsuit, R\spadesuit, R\clubsuit\} && (4)\\
D &= \text{‘Sacar un número menor que 3’} = \{1\diamondsuit, 1\heartsuit, 1\spadesuit, 1\clubsuit, 2\diamondsuit, 2\heartsuit, 2\spadesuit, 2\clubsuit\} && (5)
\end{aligned}$$

Recordemos ahora que dos sucesos son compatibles si tienen algún elemento en común, es decir si $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, mientras que si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ diremos que son incompatibles. Es fácil ver que por ejemplo A y B son compatibles puesto que

$$A \cap B = \{3\diamondsuit\} \tag{6}$$

o similarmente A Y C ya que

$$A \cap C = \{S\diamondsuit, C\diamondsuit, R\diamondsuit\} \tag{7}$$

Sin embargo, los sucesos B y C son incompatibles (un 3 no es una figura: $B \cap C = \emptyset$) y lo mismo ocurre con los sucesos C y D.

Un ejemplo de suceso seguro es el propio espacio muestral ‘sacar una carta’, mientras que un suceso imposible puede ser ‘sacar un 8’, ‘sacar un 3 que sea también figura’, etc.

(c) Considera los sucesos ‘sacar oros’ y ‘sacar figura’ y calcula su unión, su intersección y sus complementarios

Los sucesos en cuestión ya han sido definidos en la sección anterior en (2) y (4), de modo que

$$\begin{aligned}
A \cup C &= \{1\diamondsuit, 2\diamondsuit, ..., R\diamondsuit, S\heartsuit, S\spadesuit, S\clubsuit, C\heartsuit, C\spadesuit, C\clubsuit, , R\heartsuit, R\spadesuit, R\clubsuit\} && (8)\\
A \cap C &= \{S\diamondsuit, C\diamondsuit, R\diamondsuit\} && (9)\\
\bar{A} &= \{1\heartsuit, ..., R\heartsuit, 1\spadesuit, ...R\spadesuit, 1\clubsuit, ..., R\clubsuit\} && (10)\\
\bar{B} &= \{1\diamondsuit, ..., 7\diamondsuit, 1\heartsuit, ..., 7\heartsuit, 1\spadesuit, ...7\spadesuit, 1\clubsuit, ..., 7\clubsuit\} && (11)
\end{aligned}$$

(d) **Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:** Dado que nuestro espacio muestral es de Laplace (todos los sucesos elementales son equiprobables) puesto que no es una baraja trucada ni con cartas repetidas, podremos calcular todas las probabilidades que nos piden simplemente usando la regla de Laplaces, esto es

$$P(S) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de elementos en } S}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de elementos en } E} \tag{12}$$

- **Sacar oros** Se trata del suceso A, que como vimos en (2) tiene 10 sucesos elementales de E (10 cartas de oros) de modo que

$$\mathcal{P}(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \tag{13}$$

- **Sacar una figura** Se trata del suceso C, que como vimos en (4) tiene 12 sucesos elementales de E (12 cartas de figura) de modo que

$$\mathcal{P}(C) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} \tag{14}$$

- **Sacar una figura de oros** Se trata del suceso $A \cap C$, que como vimos en (9) tiene 3 sucesos elementales de E, de modo que

$$\mathcal{P}(A \cap C) = \frac{3}{40} \tag{15}$$

  Otra forma de calcular esta probabilidad (aunque quizá en este caso sea matar moscas a cañonazos) es utilizar la definición de probabilidad condicionada para calcular la intersección. En concreto, tendremos que

$$\mathcal{P}(A \cap C) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(C/A) \tag{16}$$

  $\mathcal{P}(A)$ ha sido calculado en el apartado anterior, y para calcular $\mathcal{P}(C/A)$ consideramos la probabilidad de escoger una figura de entre las cartas de oros, es decir

$$p(C/A) = \frac{3}{10} \tag{17}$$

  poniendo ambas cosas juntas en (16) tenemos

$$\mathcal{P}(A \cap C) = \frac{10}{40} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{40} \tag{18}$$

  que, evidentemente, coincide con lo que obtuvimos en (15).

- **Sacar oros o una figura** Se trata del suceso $A \cup C$, que como vimos en (8) tiene 19 sucesos elementales de E, de modo que

$$\mathcal{P}(A) = \frac{19}{40} \tag{19}$$

  En caso de no conocer el suceso $A \cup C$ y su número de elementos, también podríamos haber usado la identidad

$$\mathcal{P}(A \cup C) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(A \cap C) \tag{20}$$

  y dado que conocemos las tres proabilidades de la derecha, que acabamos de calcular tendremos

$$\mathcal{P}(A \cup C) = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40} \tag{21}$$

- **Sacar la sota de oros**
  Este caso es muy sencillo, puesto que sólo es una de las 40 cartas y usando la regla de laplace

$$\mathcal{P}(S) = \frac{1}{40} \tag{22}$$

- **Sacar una carta que no sea una figura de oros**
  El suceso en cuestión es el complementario de sacar una figura de oros, es decir $\overline{A \cap C}$ y recordamos que para cualquier suceso S, se tiene $\mathcal{P}(\bar{S}) = 1 - \mathcal{P}(S)$ de modo que en nuestro caso y usando el resultado (15)

$$\mathcal{P}(\overline{A \cap C}) = 1 - \mathcal{P}(A \cap C) = 1 - \frac{3}{40} = \frac{37}{40} \tag{23}$$

Volver al enunciado

2. Se lanza un dado con 12 caras numeradas del 1 al 12 y se consideran los sucesos:

- $A =$ 'salir par'
- $B =$ 'salir impar'
- $C =$ 'salir un nº múltiplo de 3'
- $D =$ 'salir un nº múltiplo de 5'
- $F =$ 'salir un nº mayor que 5'
- $G =$ 'salir un nº menor o igual que 4'
- $H =$ 'salir un nº que no sea múltiplo de 5'
- $I =$ 'salir un nº primo'

(a) **Escribe estos sucesos.**

Evidentemente, el espacio muestral es simplemente $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ y los subconjuntos que nos piden son

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \\ B &= \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \\ C &= \{3, 6, 9, 12\} \\ D &= \{5, 10\} \\ F &= \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \\ G &= \{1, 2, 3, 4\} \\ H &= E - D = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12\} \\ I &= \{2, 3, 5, 7, 11\} \end{aligned}$$

(b) **Señala los pares de sucesos que son incompatibles.** Recordamos que dos sucesos son incompatibles si no comparten ningún elemento. Mirando los conjuntos de arriba vemos que los pares

$$A \cap B = \emptyset \qquad (24)$$
$$C \cap D = \emptyset \qquad (25)$$
$$D \cap G = \emptyset \qquad (26)$$
$$D \cap H = \emptyset \qquad (27)$$
$$(28)$$

(c) **¿Hay tres sucesos que sean incompatibles?**

No. Para que 3 sucesos sean incompatibles deben ser nulas todas sus posibles intersecciones dos a dos. Por ejemplo, del apartado anterior tenemos que $C \cap D = \emptyset$ y $D \cap G = \emptyset$ pero como $C \cap G = \{3\}$, no nos vale.

(d) **Considera los sucesos A y C y calcula $A \cup C$, $A \cap C$, $\bar{A} \cap C$, $\overline{A \cup C}$ y $\overline{A \cap C}$. Trata de descibir con palabras estos sucesos.**

Para los dos primeros simplemente

$$A \cup C = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\} \qquad (29)$$
$$A \cap C = \{6, 12\} \qquad (30)$$
$$(31)$$

Para el tercero, nos damos cuenta de que $\bar{A} = B$ y tenemos

$$\bar{A} \cap C = B \cap C = \{3, 9\} \qquad (32)$$

para los siguientes simplemente usamos los resultados (29) y (30) y escribimos sus complementarios respecto del espacio total E, es decir

$$\begin{aligned}\overline{A \cup C} &= \{1,5,7,11\} \quad (33)\\ \overline{A \cap C} &= \{1,2,3,4,5,7,8,9,10,11\} \quad (34)\\ & \quad (35)\end{aligned}$$

Habría sido posible también obtener el resultado usando las leyes de Morgan, que nos dicen que $\overline{A \cup C} = \bar{A} \cap \bar{C}$ y $\overline{A \cap C} = \bar{A} \cup \bar{C}$. En este caso como hemos dicho $\bar{A} = B$ y tendríamos que $\bar{C} = \{1,2,4,5,7,8,10,11\}$ y por tanto

$$\begin{aligned}\overline{A \cup C} &= B \cap \bar{C} = \{1,5,7,11\} \quad (36)\\ \overline{A \cap C} &= B \cup \bar{C} = \{1,2,3,4,5,7,8,9,10,11\} \quad (37)\\ & \quad (38)\end{aligned}$$

que evidentemente coincide con el resultado anterior. Para describir estos sucesos

- $A \cup C =$ 'sacar un número múltiplo de 2 o de tres'
- $A \cup C =$ 'sacar un número múltiplo de 2 y de tres'
- $\bar{A} \cup C =$ 'sacar un número impar o múltiplo de tres'
- $\overline{A \cup C} =$ 'sacar un número que no sea múltiplo de dos ni de tres'
- $\overline{A \cap C} =$ 'sacar un número que no sea múltiplo de dos y de tres'

(e) **Asumiendo que el dado es justo, calcula la probabilidad de que salga un número entre el 5 y el 9 (incluidos). Calcula también las probabilidades de todos los sucesos A al I**

Si el dado es justo entonces tenemos un espacio muestral de Laplace, y podemos usar la regla de Laplace para calcular la probabilidad. Los casos favorables son $\{5,6,7,8,9\}$, que son 5, y por tanto

$$\mathcal{P}(\text{'sacar un nº entre el 5 y el 9'}) = \frac{5}{12} \quad (39)$$

para los demás sucesos basta con contar el número de sucesos elementales de cada uno, que serán los casos favorables y dividir por el número total de sucesos elementales, que serán los casos posibles. En particular

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) &= \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad (40)\\ \mathcal{P}(B) &= \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad (41)\\ \mathcal{P}(C) &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad (42)\\ \mathcal{P}(D) &= \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad (43)\\ \mathcal{P}(F) &= \frac{7}{12} \quad (44)\\ \mathcal{P}(G) &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad (45)\\ \mathcal{P}(H) &= \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \quad (46)\\ \mathcal{P}(I) &= \frac{5}{12} \quad (47)\end{aligned}$$

(f) **Supongamos que el dado está trucado de tal modo que el 12 tiene un 50% de probabilidades de salir y el resto tienen la misma probabilidad. Calcula $\mathcal{P}(3)$ y las probabilidades de todos los sucesos A al I**

Dado que la probabilidad de sacar un 12 es $\mathcal{P}(12) = 0,5$, tendremos que la de no sacar un 12 será $\mathcal{P}(\overline{12}) = 1 - 0,5 = 0,5$ y si todos los demás números tienen la misma probabilidad entonces

$$\mathcal{P}(1) = \mathcal{P}(2) = \mathcal{P}(3) = ... = \mathcal{P}(11) = \frac{0,5}{11} = \frac{1}{22} \tag{48}$$

Evidentemente, todos y cada uno de los sucesos elementales de nuestro espacio muestral son incompatibles dos a dos (o sacamos un 3 o sacamos un 7, pero no pueden ocurrir las dos cosas a la vez), de modo que para los sucesos A al I bastará con sumar las probabilidades de cada uno. En concreto

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(2) + \mathcal{P}(4) + \mathcal{P}(6) + \mathcal{P}(8) + \mathcal{P}(10) + \mathcal{P}(12) = 5 \cdot \frac{1}{22} + \frac{1}{2} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11} \tag{49}$$

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(1) + \mathcal{P}(3) + \mathcal{P}(5) + \mathcal{P}(7) + \mathcal{P}(9) + \mathcal{P}(11) = 6 \cdot \frac{1}{22} = \frac{3}{11} \tag{50}$$

$$\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(3) + \mathcal{P}(6) + \mathcal{P}(9) + \mathcal{P}(12) = 3 \cdot \frac{1}{22} + \frac{1}{2} = \frac{14}{22} \tag{51}$$

$$\mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(5) + \mathcal{P}(10) = 2 \cdot \frac{1}{22} = \frac{1}{11} \tag{52}$$

$$\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(6) + \mathcal{P}(7) + \mathcal{P}(8) + \mathcal{P}(9) + \mathcal{P}(10) + \mathcal{P}(11) + \mathcal{P}(12) = 6 \cdot \frac{1}{22} + \frac{1}{2} = \frac{17}{22} \tag{53}$$

$$\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(1) + \mathcal{P}(2) + \mathcal{P}(3) + \mathcal{P}(4) = 4 \cdot \frac{1}{22} = \frac{2}{11} \tag{54}$$

$$\mathcal{P}(H) = 1 - \mathcal{P}(D) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \tag{55}$$

$$\mathcal{P}(I) = \mathcal{P}(2) + \mathcal{P}(3) + \mathcal{P}(5) + \mathcal{P}(7) + \mathcal{P}(11) = 5 \cdot \frac{1}{22} = \frac{5}{22} \tag{56}$$

Volver al enunciado

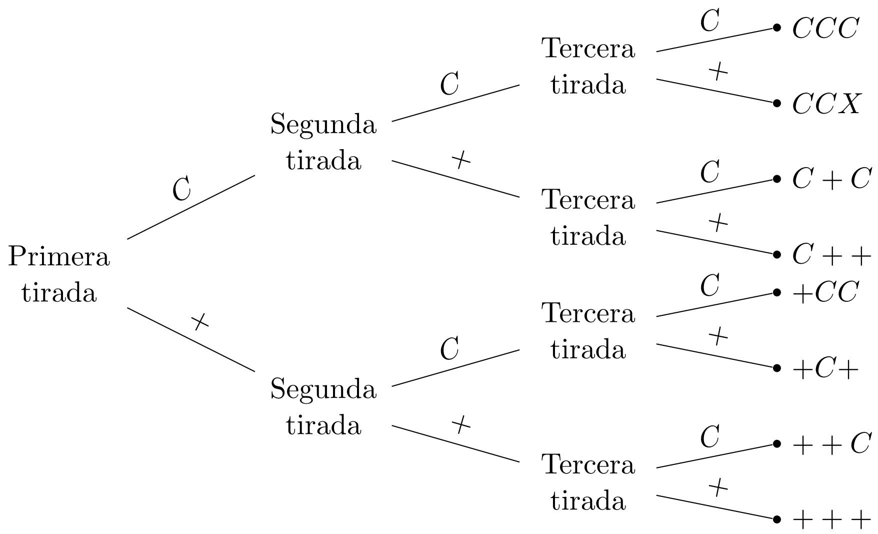
3. Un experimento consiste en el lanzamiento de tres monedas

(a) Determina el espacio muestral en los dos casos siguientes

- **Apuntamos el resultado de cada lanzamiento**
- **Sólo apuntamos el número de caras**

Razona si cada uno de estos espacios muestrales está compuesto de sucesos elementales equiprobables

Para el primer caso basta con estudiar la combinatoria de las tres monedas para llegar a la conclusión de que el espacio muestral tiene 8 elementos. Podemos ayudarnos del árbol de combinaciones



de modo que el espacio muestral es

$$E_1 = \{CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++\} \tag{57}$$

Para el segundo caso, es evidente que sólo existen 4 posibilidades desde no sacar ninguna cara a sacar las tres. Por tanto

$$E_2 = \{0 \text{ caras}, 1 \text{ cara}, 2 \text{ caras}, 3 \text{ caras}\} \tag{58}$$

Asumiendo que las monedas no están trucadas y dado el diseño del experimento, es fácil ver que el primer espacio muestral será de Laplace (todos sus sucesos elementales son equiprobables) mientras que el segundo no lo será. Por ejemplo, el suceso '2 caras' de E_2 corresponde a 3 casos favorables de E_1, mientras que el suceseo '3 caras' corresponde solamente al suceso CCC.

(b) Considera los siguientes sucesos

- A = **'sacar al menos una cara'**
- B = **'sacar una sola cara'**
- C = **'sacar al menos dos cruces'**

Determina y describe los sucesos $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ $A \cup B$ y $A \cap B$

Empecemos primero escribiendo los sucesos A, B y C

$$\begin{aligned} A &= \{CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C\} && (59)\\ B &= \{C++, +C+, ++C\} && (60)\\ C &= \{C++, +C+, ++C, +++\} && (61) \end{aligned}$$

y por tanto los sucesos que nos piden serán

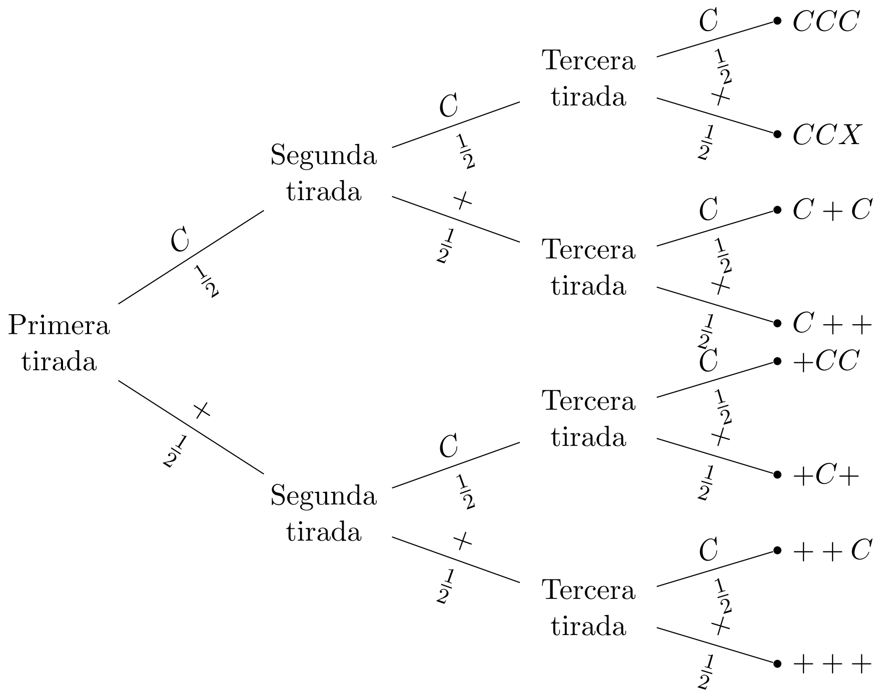
$$
\begin{aligned}
\bar{A} &= \{+++\} = \text{‘Sacar todo cruces’} && (62)\\
\bar{B} &= \{CCC, CC+, C+C, +CC, +++\} = \text{‘no sacar una sola cara’} && (63)\\
\bar{C} &= \{CCC, CC+, C+C, +CC\} = \text{‘no sacar al menos dos cruces’} && (64)\\
&= \text{‘sacar menos de dos cruces’} && (65)\\
A \cup B &= \{CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C\} = A && (66)\\
&= \text{‘sacar al menos una cara o sacar una sola cara’} = \text{‘sacar al menos una cara’}\\
A \cap B &= \{C++, +C+, ++C\} = B && (67)\\
&= \text{‘sacar al menos una cara y sacar una sola cara’} = \text{‘sacar una sola cara’}\\
A \cup C &= \{CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++\} = && (68)\\
&= \text{‘sacar al menos una cara o al menos dos cruces’}\\
A \cap C &= \{C++, +C+, ++C\} = && (69)\\
&= \text{‘sacar al menos una cara y al menos dos cruces’} = \text{‘sacar una cara y dos cruces’}\\
B \cup C &= \{C++, +C+, ++C, +++\} = C && (70)\\
&= \text{‘sacar al menos una cara o al menos dos cruces’} = \text{‘sacar al menos dos cruces’}\\
B \cap C &= \{C++, +C+, ++C\} = && (71)\\
&= \text{‘sacar una sola cara o al menos dos cruces’} = \text{‘sacar una cara y dos cruces’}\\
& && (72)
\end{aligned}
$$

(c) **Suponiendo que la moneda no está trucada, calcula la probabilidad de A, B y C**

Dado que el espacio muestral es de Laplace, basta con contar el número de elementos de cada suceso y usar la regla de Laplace. En particular

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(A) &= \frac{7}{8} && (73)\\
\mathcal{P}(B) &= \frac{3}{8} && (74)\\
\mathcal{P}(C) &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2} && (75)\\
& && (76)
\end{aligned}
$$

Aunque este caso es trivial, mostramos a continuación el árbol de probabilidades:



(d) Si la moneda está trucada de tal modo que sale cara un 60% de las veces, calcula la probabilidad de sacar tres caras, de sacar tres cruces, y de los sucesos A y C

Al contrario que en el caso anterior, el espacio muestral no será ahora de Laplace de modo que debemos tener cuidado y calcular las probabilidades en mayor detalle. Al igual que en el anterior caso, este experimento está compuesto de tres tiradas, cada una independiente de las demás, de modo que podemos pensar en él como la concatenación de tres experimentos independientes uno de otro, en cada uno de los cuales tiramos una moneda. En cada uno de estos experimentos tenemos $\mathcal{P}(C) = 0,6$ y $\mathcal{P}(+) = 0.4$ y la probabilidad de cualquier combinación de resultados será (por ser estos independientes) simplemente el producto de las probabilidades de cada uno. Por ejemplo, si queremos saber la probabilidad de sacar primero cara, después cruz, y después cara tendremos

$$\mathcal{P}(C_1 \cap +_2 \cap C_3) = \mathcal{P}(C_1) \cdot \mathcal{P}(+_2) \cdot \mathcal{P}(C_3) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,144 \tag{77}$$

donde hemos añadido subíndices para indicar a qué lanzamiento nos referimos. La probabilidad de sacar 3 caras por tanto es

$$\mathcal{P}(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = \mathcal{P}(C_1) \cdot \mathcal{P}(C_2) \cdot \mathcal{P}(C_3) = (0,6)^3 = 0,216\,. \tag{78}$$

Para calcular la probabilidad del suceso C debemos considerar los cuatro casos contenidos en (61). La probabilidad que nos interesa es

$$\mathcal{P}(\text{`al menos dos cruces'}) = \mathcal{P}\left[(C_1 \cap +_2 \cap +_3) \cup (+_1 \cap C_2 \cap +_3) \cup (+_1 \cap +_2 \cap C_3) \cup (+_1 \cap +_2 \cap +_3)\right] (79$$

y dado que los 4 resultados son independientes simplemente podremos sumar las cuatro probabilidades[1] de modo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\text{`al menos dos cruces'}) &= \mathcal{P}(C_1 \cap +_2 \cap +_3) + \mathcal{P}(+_1 \cap C_2 \cap +_3) + \mathcal{P}(+_1 \cap +_2 \cap C_3) + \mathcal{P}(+_1 \cap +_2 \cap \\
&= 0,6 \cdot (0,4)^2 + 0,6 \cdot (0,4)^2 + 0,6 \cdot (0,4)^2 + (0,4)^3 \\
&= 0,35
\end{aligned}$$

[1] En el fondo esto es un caso particular de la fórmula de probabilidad total, pero aún más simple, puesto que aquí las probabilidades condicionadas no están realmente condicionadas por ser experimentos independientes, es decir $\mathcal{P}(C_2/C_1) = \mathcal{P}(C_2/+_2) = \mathcal{P}(C_2) = 0,6$.

como vemos, con esta moneda trucada es menos probable sacar al menos dos cruces que en el caso (75) de la moneda justa, como era de esperar.

Para calcular la probabilidad del suceso A (sacar al menos una cara) podríamos hacer algo similar y calcular todas las combinaciones favorables en (59) y sumarlas. Es más inteligente no obstante darse cuenta de que el único suceso no favorable $\bar{A}$ es el de sacar 3 cruces, y por tanto podemos ahorrar mucho tiempo calculando

$$\mathcal{P}(A) = 1 - \mathcal{P}(\bar{A}) \tag{82}$$

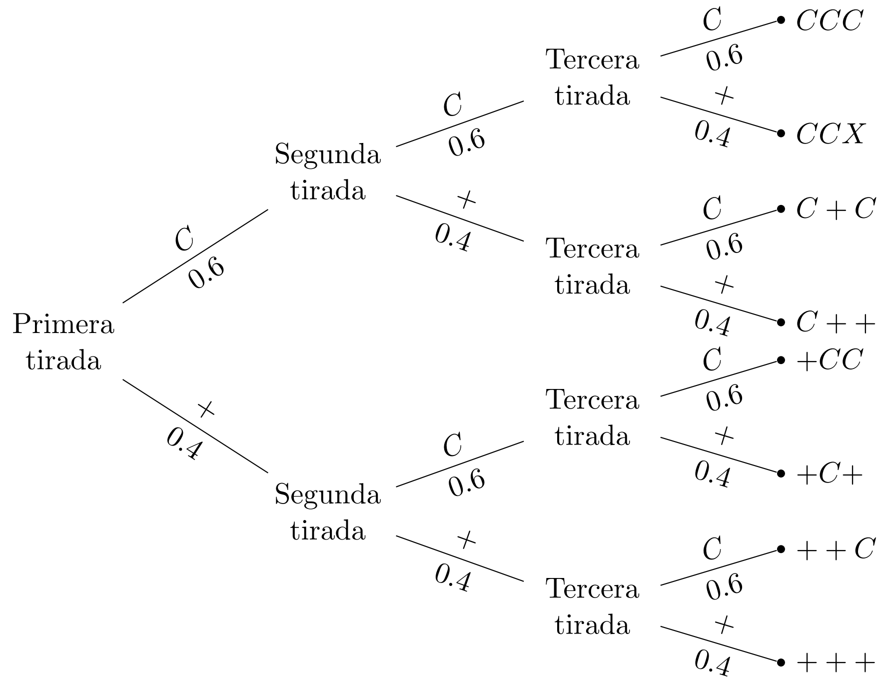
donde

$$\mathcal{P}(\bar{A}) = \mathcal{P}(+_1 \cap +_2 \cap +_3) = (0,4)^3 = 0,064 \tag{83}$$

y por tanto

$$\mathcal{P}(A) = 1 - 0,064 = 0,936 \tag{84}$$

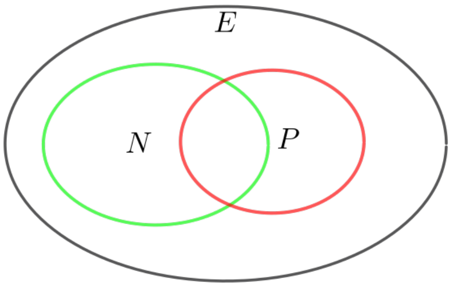
que, como vemos, es una probabilidad más alta que (73), tal y como cabía esperar de esta moneda trucada. A continuación mostramos el árbol de probabilidad de este experimento



Volver al enunciado

4. De 500 habitantes, 350 leen la prensa escrita habitualmente y 300 ven las noticias en televisión. Sabemos que un 35% del total hace las dos cosas. Calcula la probabilidad de que una persona elegidaal azar:

Antes de empezar a calcular las probabilidades pedidas, es conveniente que nos hagamos un esquema para entender el tipo de problema que nos encontramos y cuáles son los datos que nos dan. Para empezar, es evidente que tenemos un par de conjuntos que pertenecen al espacio total, es decir la gente que lee la prensa (que llamaremos P) y la gente que ve las noticias (que llamaremos N) y ambos pertenecen al conjunto total E, es decir $P \subset E$ y $N \subset E$. También sabemos que existe un cierto solapamiento entre P y N puesto que nos dicen que hay gente que lee la prensa y ve las noticias. Se sigue por tanto que $P \cap N \neq \emptyset$ y el diagrama de Venn correspondiente tendrá la siguiente estructura:



Veamos ahora qué datos nos da el problema. Nos dicen el total de personas en P y en N de modo que nos están dando indirectamente las probabilidades

$$\mathcal{P}(P) = \frac{350}{500} = \frac{7}{10} = 0,7 \tag{85}$$
$$\mathcal{P}(N) = \frac{300}{500} = \frac{3}{5} = 0,6 \tag{86}$$

También nos dan el porcentaje de gente que ve ambas cosas, lo cual corresponde al conjunto intersección $P \cap N$

$$\mathcal{P}(P \cap N) = 0,35\,. \tag{87}$$

Una vez identificados los datos del problema, vayamos con las preguntas.

(a) No vea las noticias ni lea la prensa

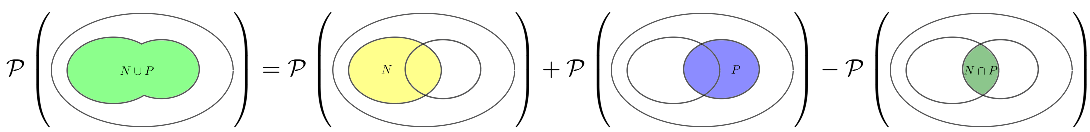
El conjunto de gente que o bien ve las noticias o bien lee la prensa es $P \cup N$, de modo que el que no ve ninguna de las dos será su complementario $\overline{P \cup N}$. Si calculamos la probabilidad del primero[2]

$$\mathcal{P}(P \cup N) = \mathcal{P}(P) + \mathcal{P}(N) - \mathcal{P}(P \cap N) = 0,7 + 0,6 - 0,35 = 0,95 \tag{88}$$

y por tanto su complementario será

$$\mathcal{P}(\overline{P \cup N}) = 1 - \mathcal{P}(P \cup N) = 1 - 0,95 = 0,05 \tag{89}$$

[2] Si resulta de utilidad, se puede recordar la propiedad con el diagrama de Venn



(b) Vea las noticias, pero no lea la prensa

El conjunto que nos piden es aque que resulta de quitarle a N los elementos que también están en P, es decir, el conjunto $N - N \cap P$. Tendremos por tanto[3]

$$\mathcal{P}(N - N \cap P) = \mathcal{P}(N) - \mathcal{P}(N \cap P) = 0,6 - 0,35 = 0,25 \tag{90}$$

(c) Vea las noticias, sabiendo que lee la prensa.

En este caso nos piden una probabilidad condicionada, en concreto $\mathcal{P}(N/P)$. Usando simplemente la definición de probabilidad condicionada tenemos

$$\mathcal{P}(N/P) = \frac{\mathcal{P}(N \cap P)}{\mathcal{P}(P)} = \frac{0,35}{0,7} = 0,5 \tag{91}$$

(d) No vea las noticias, sabiendo que lee la prensa.

De nuevo se trata de una probabilidad condicionada, en concreto $\mathcal{P}(\bar{N}/P)$. Usando simplemente la definición de probabilidad condicionada tenemos

$$\mathcal{P}(\bar{N}/P) = \frac{\mathcal{P}(\bar{N} \cap P)}{\mathcal{P}(P)} . \tag{92}$$

En este caso no disponemos directamente de $\mathcal{P}(\bar{N} \cap P)$ pero sabemos que este conjunto será coomplementario a N respecto de P, es decir, que [4]

$$\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(P \cap N) + \mathcal{P}(P \cap \bar{N}) \tag{93}$$

y por tanto

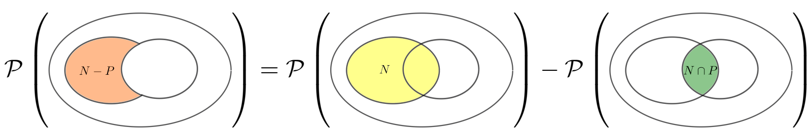
$$\mathcal{P}(P \cap \bar{N}) = \mathcal{P}(P) - \mathcal{P}(P \cap N) = 0,7 - 0,35 = 0,35 \tag{94}$$

de modo que sustituyendo en (92) tenemos

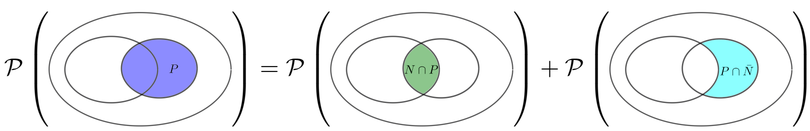
$$\mathcal{P}(\bar{N}/P) = \frac{0,35}{0,7} = 0,5 \tag{95}$$

Volver al enunciado

[3] De nuevo, si se desea ver gráficamente



[4] Gráficamente



5. **Se sabe que en un centro de enseñanza el 30% de los alumnos aprueban la asignatura A, el 40% la asignatura B y el 5% aprueban ambas. Calcula la probabilidad de que un alumno:**

Se trata de un ejercicio similar al anterior. En este caso podemos llamar A al conjunto de alumnos que aprueban la asignatura A, y B al conjunto de alumnos que aprueban B. Los datos que nos están dando por tanto son

$$\mathcal{P}(A) = 0,3 \tag{96}$$
$$\mathcal{P}(B) = 0,4 \tag{97}$$
$$\mathcal{P}(A \cap B) = 0,05 \tag{98}$$

Vayamos con las preguntas

(a) **Habiendo aprobado la asignatura A, apruebe la B.**

Lo que nos están pidiendo es la probabilidad condicionada $\mathcal{P}(B/A)$ que obtenemos simplemente de la definición

$$\mathcal{P}(B/A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B}{\mathcal{P}(A)} = \frac{0,05}{0,3} \simeq 0,177 \tag{99}$$

(b) **Habiendo aprobado la asignatura B, apruebe la A.**

Idéntico al caso anterior

$$\mathcal{P}(A/B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B}{\mathcal{P}(B)} = \frac{0,05}{0,4} = 0,125 \tag{100}$$

(c) No habiendo aprobado la asignatura A, apruebe la B.

En este caso nos piden la probabilidad condicionada $\mathcal{P}(B/\bar{A}$ que se obtiene como

$$\mathcal{P}(B/\bar{A}) = \frac{\mathcal{P}(\bar{A} \cap B)}{\mathcal{P}(\bar{A})} \tag{101}$$

recordamos ahora que $\bar{A} \cap B = B - A = B - A \cap B$ y por tanto que

$$\mathcal{P}(\bar{A} \cap B) = \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B) = 0,4 - 0,05 = 0,35 \tag{102}$$

y por último usamos que $P(\bar{A}) = 1 - \mathcal{P}(A)$, que en nuestro caso nos da $\mathcal{P}(\bar{A}) = 0,7$. Sustituyendo en (101) finalmente

$$\mathcal{P}(B/\bar{A}) = \frac{0,35}{0,7} = 0,5 \tag{103}$$

(d) **No habiendo aprobado la asignatura B, apruebe la A.**

Similar al anterior pero con los roles de A y B cambiados. Nos piden $\mathcal{P}(A/\bar{B}$, de modo que lo podemos calcular como

$$\mathcal{P}(A/\bar{B}) = \frac{\mathcal{P}(\bar{B} \cap A)}{\mathcal{P}(\bar{B})} \tag{104}$$

y ahora usamos igual que antes que $\mathcal{P}(\bar{B} \cap A) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(A \cap B) = 0,3 - 0,05 = 0,25$, mientras que $\mathcal{P}(\bar{B}) = 1 - \mathcal{P}(B) = 1 - 0,4 = 0,6$, y sustituyendo en la ecuación anterior tendremos

$$\mathcal{P}(A/\bar{B}) = \frac{0,25}{0,6} \simeq 0,417 \tag{105}$$

(e) No habiendo aprobado la asignatura A, no apruebe la B.

Volver al enunciado

6. He comprado papeletas para dos sorteos de navidad que me han vendido mis sobrinos. En el primero se sortea una botella de vino, y se vendieron 100 papeletas, mientras que el segundo sortea una cesta entera de navidad y había 300 números. Calcula:

Antes de nada, pongamos nombre a los sucesos relevantes

$$V = \text{'ganar el vino'} \quad (106)$$
$$C = \text{'ganar la cesta'} \quad (107)$$

(a) La probabilidad de que me toque la cesta

Si tengo una papeleta y se han repartido 300 números (y asumiendo que la rifa no está amañada y todos los números son equiprobables) simplemente

$$\mathcal{P}(C) = \frac{1}{300} \quad (108)$$

(b) La probabilidad de que me toquen ambos premios

Que me toquen ambos premios es el suceso $V \cap C$ y buscamos por tanto$\mathcal{P}(V \cap C)$. Se trata de sucesos independientes, de modo que la probabilidad de su intersección es simplemente el producto de ambas, es decir

$$\mathcal{P}(V \cap C) = \mathcal{P}(V) \cdot \mathcal{P}(C) = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{300} = \frac{1}{30000} \quad (109)$$

(c) La probabilidad de que me toque algún premio

Que me toque algún premio es el suceso $V \cup C$ y su probabilidad será

$$\mathcal{P}(V \cup C) = \mathcal{P}(V) + \mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(V \cap C) = \frac{1}{100} + \frac{1}{300} - \frac{1}{30000} = \frac{399}{30000} \quad (110)$$

(d) Si ya ha ocurrido el sorteo del vino y me ha tocado, ¿cuál es la probabilidad de que también me toque la cesta?

Se trata de una pregunta trampa. Un error típico es pensar que si la probabilidad de que me toquen ambos sorteos es muy pequeña, es casi imposible que me toque el segundo tras haber ganado el primero. Pero lo cierto es que la probabilidad es la misma que teníamos al principio, es decir $\mathcal{P}(C) = 1/300$. Precisamente por ser sucesos independientes las probabilidades condicionadas son iguales que las probabilidades absolutas

$$\mathcal{P}(C/V) = \frac{\mathcal{P}(C \cap V)}{\mathcal{P}(V)} = \frac{\mathcal{P}(C) \cdot \mathcal{P}(V)}{\mathcal{P}(V)} = \mathcal{P}(C) \quad (111)$$

Volver al enunciado

7. **Se dispone de dos dados de 6 caras, cada uno de los cuales tiene dos $\epsdice{1}$, dos $\epsdice{2}$ y dos $\epsdice{3}$. Se tiran ambos a la vez (es decir, no apuntamos en qué orden sale cada número).**

(a) ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Es de Laplace?

Dado que tiramos los dados a la vez, los sucesos elementales de nuestro espacio muestral son todos los pares de valores que se pueden obtener, sin importar el orden, es decir contiene los 6 elementos

$$E = \left\{\epsdice{1}\epsdice{1}, \epsdice{1}\epsdice{2}, \epsdice{1}\epsdice{3}, \epsdice{2}\epsdice{2}, \epsdice{2}\epsdice{3}, \epsdice{3}\epsdice{3}\right\} \tag{112}$$

Rápidamente nos damos cuenta de que el espacio muestral no es de Laplace, puesto que existen más combinaciones para ciertas parejas que para otras. Si considerásemos el experimento en el que tiramos los dados en orden apuntando cada resultado (o, equivalentemente tiramos dos dados de distinto color, por ejemplo) sí que obtendríamos un espacio muestral de Laplace, en este caso con 9 elementos

$$E' = \left\{{\color{blue}\epsdice{1}}{\color{red}\epsdice{1}}, {\color{blue}\epsdice{1}}{\color{red}\epsdice{2}}, {\color{blue}\epsdice{1}}{\color{red}\epsdice{3}}, {\color{blue}\epsdice{2}}{\color{red}\epsdice{1}}, {\color{blue}\epsdice{2}}{\color{red}\epsdice{2}}, {\color{blue}\epsdice{2}}{\color{red}\epsdice{3}}, {\color{blue}\epsdice{3}}{\color{red}\epsdice{1}}, {\color{blue}\epsdice{3}}{\color{red}\epsdice{2}}, {\color{blue}\epsdice{3}}{\color{red}\epsdice{3}}\right\} \tag{113}$$

que en este caso sí que sería de Laplace.

(b) Calcula la probabilidad de que salgan dos treses y la de que salgan un uno y un tres

De la discusión anterior, vemos que podremos usar la ley de Laplace con ayuda del segundo espacio muestral. Así pues

$$\mathcal{P}(\epsdice{1}\epsdice{1}) = \mathcal{P}({\color{blue}\epsdice{1}}{\color{red}\epsdice{1}}) = \frac{1}{9} \tag{114}$$

mientras que para el segundo caso tenemos dos casos favorables y por tanto la probabilidad será el doble

$$\mathcal{P}(\epsdice{1}\epsdice{3}) = \mathcal{P}({\color{blue}\epsdice{1}}{\color{red}\epsdice{3}} \cup {\color{blue}\epsdice{3}}{\color{red}\epsdice{1}}) = \mathcal{P}({\color{blue}\epsdice{1}}{\color{red}\epsdice{3}}) + \mathcal{P}({\color{blue}\epsdice{3}}{\color{red}\epsdice{1}}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \tag{115}$$

(c) Calcula la probabilidad de que los dados sumen 4

En el caso en el que sumamos el resultado de ambos dados, el espacio muestral sera $E'' = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, pero de nuevo es evidente que no se trata de un espacio muestral de Laplace. Será conveniente referirnos al espacio de Laplace E' y observar los sucesos favorables de allí para aplicar la regla de Laplace. En este casos el suceso será

$$\text{‘sacar suma 4’} = \{{\color{blue}\epsdice{1}}{\color{red}\epsdice{3}}, {\color{blue}\epsdice{2}}{\color{red}\epsdice{2}}, {\color{blue}\epsdice{3}}{\color{red}\epsdice{1}}\} \tag{116}$$

que como vemos tiene 3 sucesos elementales y por lo tanto

$$\mathcal{P}(\text{‘sacar suma 4’}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \tag{117}$$

También podríamos haberlo calculado usando las probabilidades de E y usando que los sucesos son incompatibles, es decir

$$\mathcal{P}(\text{‘sacar suma 4’}) = \mathcal{P}(\epsdice{1}\epsdice{3} \cup \epsdice{2}\epsdice{2}) = \mathcal{P}(\epsdice{1}\epsdice{3}) + \mathcal{P}(\epsdice{2}\epsdice{2}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \tag{118}$$

donde hemos usado los resultados del apartado anterior.

(d) Si el resultado suma 4, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dados sea un 3?

Por ser un problema sencillo el resultado es bastante intuitivo, pero es conveniente que lo hagamos con cuidado y de forma rigurosa. En primer lugar identifiquemos el suceso relevante aquí que es

$$\text{‘sacar al menos un 3’} = \{\text{⚀⚂}, \text{⚁⚂}, \text{⚂⚂}\} \tag{119}$$

y lo que nos piden es la probabilidad de este suceso condicionada a que salió un 4, es decir $\mathcal{P}(\text{‘sacar al menos un 3’}/\text{‘sacar suma 4’})$. Usando la definición de probabilidad condicionada

$$\mathcal{P}(\text{‘sacar al menos un 3’}/\text{‘sacar suma 4’}) = \frac{\mathcal{P}(\text{‘sacar al menos un 3’} \cap \text{‘sacar suma 4’})}{\mathcal{P}(\text{‘sacar suma 4’})} \tag{120}$$

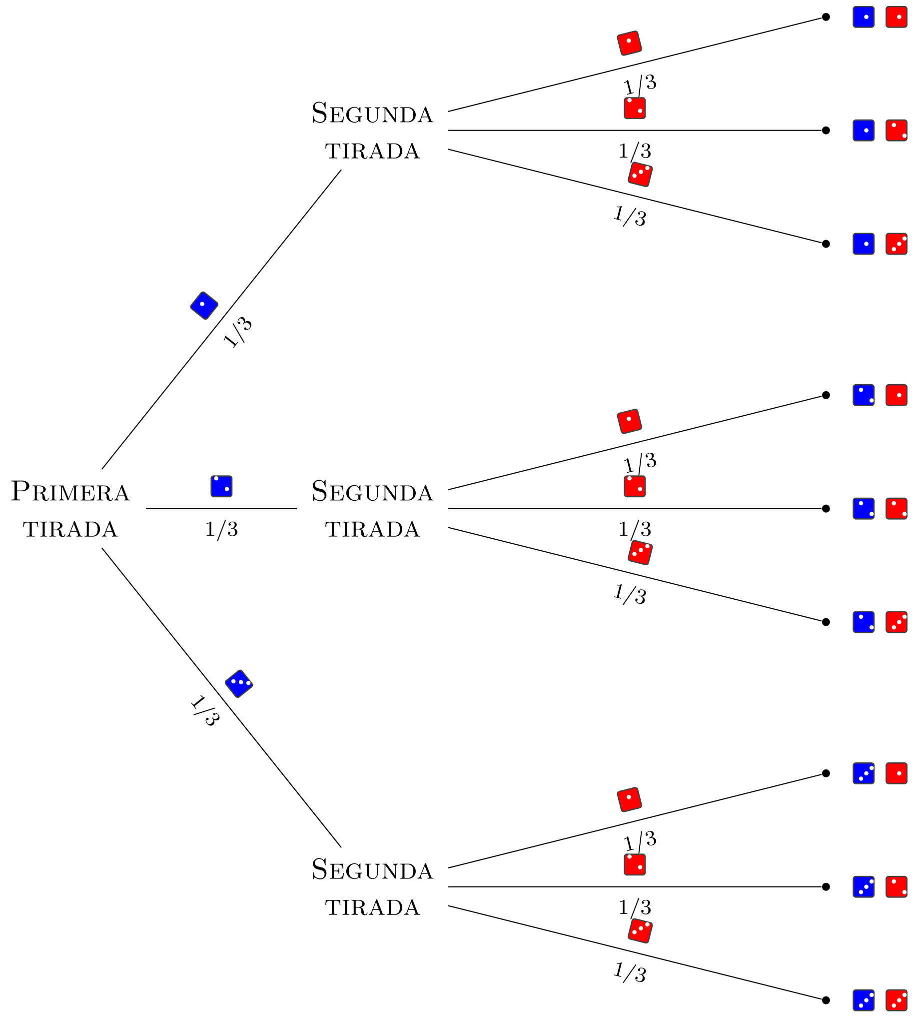
y tenemos que $\text{‘sacar al menos un 3’} \cap \text{‘sacar suma 4’} = \{\text{⚀⚂}\}$ así que

$$\mathcal{P}(\text{‘sacar al menos un 3’}/\text{‘sacar suma 4’}) = \frac{\mathcal{P}(\text{⚀⚂})}{\mathcal{P}(\text{‘sacar suma 4’})} = \frac{2/9}{1/3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \tag{121}$$

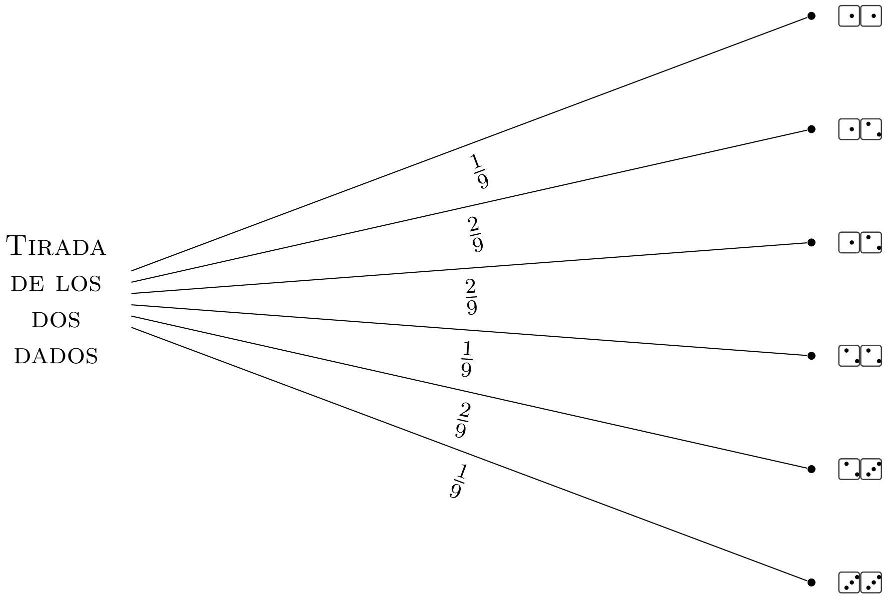
Evidentemente, el cuerpo nos pide hacer este problema de forma mucho más fácil simplemente teniendo en cuenta que los sucesos elementales de $\text{‘sacar suma 4’} = \{\text{⚀⚂}, \text{⚁⚁}, \text{⚂⚀}\}$ son equiprobables y simplemente teniendo en cuenta que sólo dos de ellos son favorables a contener un tres, dando lugar a una probabilidad de $2/3$. No obstante, no siempre vamos a disponer de conjuntos de sucesos equiprobables (los dados podrían estar trucados, o simplemente tener distinta cantidad de números) y el método anterior es mucho más general que la regla de Laplace.

A continuación mostramos algunos árboles de probabilidad relevantes para este tipo de experimento en función de las cosas que midamos

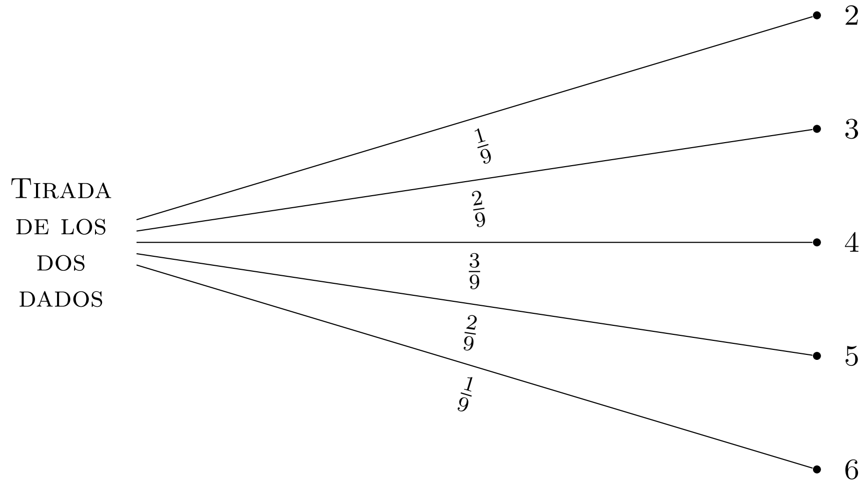
- MIRAMOS EL RESULTADO DE CADA DADO Y SU ORDEN



- Apuntamos el resultado de cada dado pero no miramos el orden



- No miramos el resultado de cada dado. Solamente su suma



Volver al enunciado

8. **Se tiene una bolsa que contiene bolas de colores. Concretamente**

- **2 bolas verdes**
- **4 bolas rojas**
- **1 bola amarilla**

Si se sacan dos bolas de la bolsa sin volverlas a meter, calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

(a) Que la primera sea la amarilla y la segunda una verde

Sean V, R y A los sucesos 'sacar una bola verde', 'sacar una bola roja','sacar una bola amarilla' respectivamente, lo que nos piden aquí es la probabilidad de sacar una bola verde en la segunda extracción y una amarilla en la primera, es decir $\mathcal{P}(V_2 \cap A_1)$. En este caso se tata de un experimento con sucesos dependientes, pues el hecho de que no volvamos a meter la pelota en la bolsa tras la primera extracción condiciona las probabilidades. Para nuestro caso, basta con usar la definición de la probabilidad condicionada

$$\mathcal{P}(V_2 \cap A_1) = \mathcal{P}(A_1) \cdot \mathcal{P}(V_2/A_1) \tag{122}$$

y tendremos que simpplemente la regla de Laplace nos da cada uno de estos factores. En particular, en la primera extracción hay 1 caso favorable de los 7 posibles, de modo que $\mathcal{P}(A_1) = \frac{1}{7}$, mientras que después de extraer esta bola quedan dos bolas verdes de un total de 6 en la bolsa, de modo que $\mathcal{P}(V_2/A_1) = \frac{2}{6}$. Así pues

$$\mathcal{P}(V_2 \cap A_1) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{21} \tag{123}$$

(b) Que salga una roja y una verde (sin importar el orden)

Para este caso nos piden $\mathcal{P}(R \cap V)$ sin importar el orden, y tenemos que considerar los dos órdenes posibles y calcular $\mathcal{P}((R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap R_2))$ que al ser sucesos incompatibles darán lugar a una probabilidad que es la suma de ambas

$$\mathcal{P}(R \cap V) = \mathcal{P}((R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap R_2)) = \mathcal{P}(R_1 \cap V_2) + \mathcal{P}(V_1 \cap R_2) \tag{124}$$

y simplemente cada una de estas probabilidades se puede calcular igual que en el apartado anterior

$$\mathcal{P}(R_1 \cap V_2) = \mathcal{P}(R_1) \cdot \mathcal{P}(V_2/R_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{21} \tag{125}$$

$$\mathcal{P}(V_1 \cap R_2) = \mathcal{P}(V_1) \cdot \mathcal{P}(R_2/V_1) = \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{21} \tag{126}$$

sumando ambas por tanto

$$\mathcal{P}(R \cap V) = \frac{4}{21} + \frac{4}{21} = \frac{8}{21} \tag{127}$$

(c) Que salgan dos rojas Este caso es similar al primero y sólo hay un orden posible, de modo que

$$\mathcal{P}(R \cap R) = \mathcal{P}(R_1 \cap R_2) = \mathcal{P}(R_1) \cdot \mathcal{P}(R_2/R_1) = \frac{4}{7}\frac{3}{6} = \frac{4}{14} \tag{128}$$

donde la única sutileza es que hemos tenido que tener cuidado de darnos cuenta de que en la segunda extracción sólo hay 3 casos favorables, puesto que una de las bolas rojas ya ha salido.

(d) Que salgan dos bolas del mismo color

En este caso nos piden el suceso $(R \cap R) \cup (V \cap V)$, puesto que no pueden salir dos bolas amarillas. Por ser sucesos incompatibles, la probabilidad de su unión será la suma de sus probabilidades

$$\mathcal{P}((R \cap R) \cup (V \cap V)) = \mathcal{P}(R \cap R) + \mathcal{P}(V \cap V) \tag{129}$$

y dado que ya hemos calculado la primera en (128), sólo nos falta

$$\mathcal{P}(V \cap V) = \frac{2}{7}\frac{1}{6} = \frac{1}{21} \tag{130}$$

y por tanto

$$\mathcal{P}((R \cap R) \cup (V \cap V)) = \frac{4}{14} + \frac{1}{21} = \frac{1}{3} \tag{131}$$

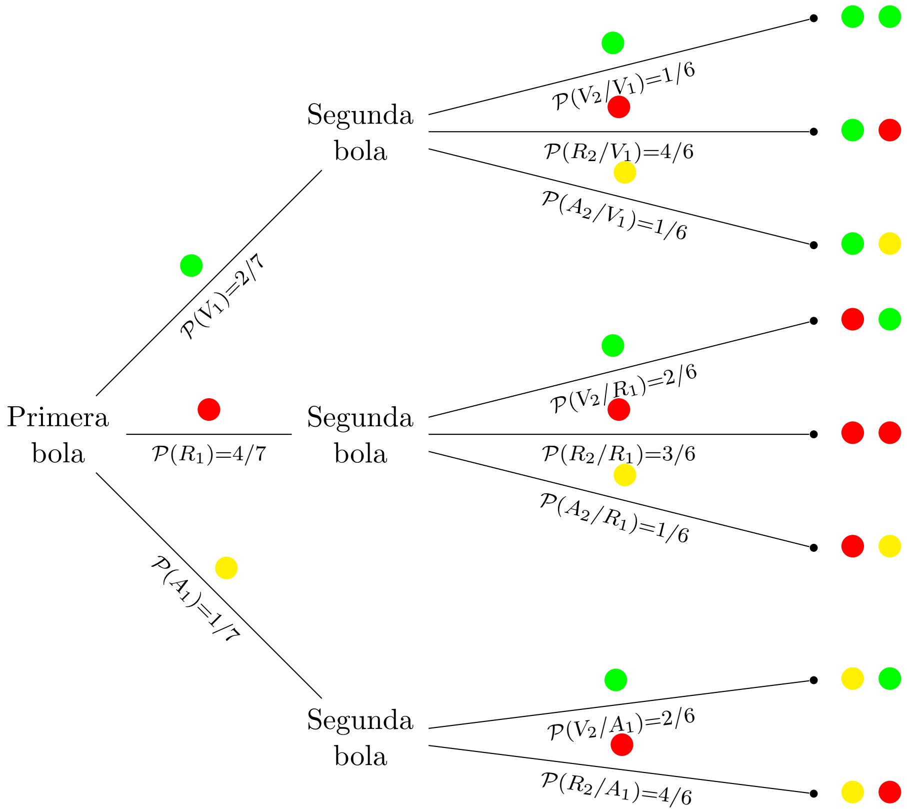
(e) Que salga la bola amarilla

Podemos calcular esto usando la descomposición de pronbabilidad total. En particular, calculando la probabilidad de cada los sucesos favorable

$$\mathcal{P}(A_1 \cap R_2) = \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{6} \tag{132}$$
$$\mathcal{P}(A_1 \cap V_2) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} \tag{133}$$
$$\mathcal{P}(R_1 \cap A_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{6} \tag{134}$$
$$\mathcal{P}(V_1 \cap A_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \tag{135}$$

y simplemente sumando las 4 obtenemos

$$\mathcal{P}(A) = \frac{1}{7}\left(\frac{4}{6} + \frac{2}{6}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{7} + \frac{2}{7}\right) = \frac{2}{7} \tag{136}$$



Volver al enunciado