HOJA DE EJERCICIOS - INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Enunciados

NOTA: *Los ejercicios se presentan de tal manera que la dificultad de cada apartado es creciente. Se hace esto para que el alumnado disponga de ejemplos muy fáciles con los que coger confianza y práctica, evolucionando poco a poco hacia los casos más complejos. El nivel que se pedirá en las pruebas de evaluación evidentemente será similar al de estos últimos ejemplos más completos, y no al de los primeros.*

1. Encuentra las soluciones de las siguientes inecuaciones lineales

   (a) $x \leq 0$
   (b) $2x < 4$
   (c) $3x + 2 \geq 7$
   (d) $\frac{x}{5} - 1 \leq 8$
   (e) $5x + 1 > x - 15$
   (f) $\frac{x-8}{3} \geq 3x + 5$

Ir a solución

2. Encuentra las soluciones de las siguientes inecuaciones polinómicas de grado 2

   (a) $x^2 - 9 \leq 0$
   (b) $x^2 - 10 > 6$
   (c) $5 - x^2 < 8$
   (d) $x^2 - 8 \leq -2x$
   (e) $x^2 + 15 \leq 0$
   (f) $4x^2 + 25 + 20x > 0$
   (g) $-6x^2 - 9x + 6 \leq 0$

Ir a solución

3. Encuentra las soluciones de las siguientes inecuaciones polinómicas de grado superior a 2.

   (a) $x^2(x+2) \leq 0$
   (b) $(x+2)^2(x-4) \geq 0$
   (c) $(x+1)(x-3)(x+2) < 0$
   (d) $x(x+5)(x-3) > 0$
   (e) $(x+1)(x^2-25) \leq 0$
   (f) $(1-x)(x^2-x-6) \leq 0$

Ir a solución

4. Encuentra las soluciones de las siguientes inecuaciones con fracciones algebraicas

   (a) $\frac{x}{x+2} \leq 0$
   (b) $\frac{x(x+1)}{x-2} \geq 0$
   (c) $\frac{x^2-36}{3-x} < 0$
   (d) $\frac{x^2-x-6}{x+4} > 0$

Ir a solución

Soluciones

Antes de resolver los ejercicios, recordemos rápidamente algo de teoría: en primer lugar, una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas, por ejemplo

$$f(x) \geq g(x) \tag{1}$$

Lo primero que debemos tener claro es que, al contrario que en el caso de las ecuaciones, el conjunto de soluciones de una inecuación habitualmente es infinito[1], y en la mayoría de los casos vendrá dado por uno o varios intervalos de valores de la recta real. Para encontrar dichos intervalos, es útil que dejemos uno de los miembros de la inecuación a cero

$$f(x) - g(x) \geq 0 \tag{2}$$

de modo que el problema se reduzca al estudio del signo de la expresión algebraica $h(x) = f(x) - g(x)$. Una vez llegados a este punto, es conveniente hacer la siguiente reflexión: para decidir en qué intervalos $h(x)$ es positiva y en cuáles es negativa será útil encontrar primero en qué puntos $h(x)$ es cero, puesto que es razonable pensar que si en algún punto pasa de ser positiva a negativa entonces tomará el valor cero en dicho punto[2], de modo que las soluciones de la ecuación $h(x) = 0$ serán posibles puntos en los que $h(x)$ puede cambiar de signo. Lo mismo ocurrirá en algunos puntos en los que la función no esté definida por una división por cero, como por ejemplo la función $\frac{1}{x}$ que no vale cero en $x = 0$ (de hecho, es un punto que no está en el dominio) pero en la que vemos claro que al cambiar el denominador de signo también lo hará la función.

En resumidas cuentas, supongamos que tenemos una cierta inecuación escrita ya en la forma

$$h(x) \geq 0 \tag{3}$$

o cualquiera de sus variantes con diferentes desigualdades $<$, $>$, $\leq$. Supongamos que $h(x)$ es como mucho una fracción algebraica, es decir, un cociente de polinomios $h(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, entonces

- Buscaremos en qué puntos $P(x) = 0$ y $Q(x) = 0$ resolviendo estas ecuaciones y obteniendo las soluciones $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, que serán nuestros puntos de interés.
- Dichas soluciones dividen la recta real en $n+1$ intervalos: $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, \infty)$. Nuestro trabajo es estudiar el signo de $h(x)$ en cada uno de estos intervalos.
- Dado que el signo sólo puede cambiar en las soluciones x_i, basta encontrar el signo para un valor concreto de cada intervalo para asegurar que $h(x)$ tendrá dicho signo en todo el intervalo. Se nos presentan por tanto dos posibilidades:
  - Podremos tomar un valor de cada uno de los intervalos y evaluar $h(x)$ entera en cada uno de estos valores. Simplemente observando el signo del resultado obtendremos el signo de $h(x)$ en cada intervalo.
  - Para simplificar la tarea de evaluar $h(x)$ es posible factorizar los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ evaluando el signo de cada factor en cada intervalo. El signo de $h(x)$ se obtendrá simplemente multiplicando los signos de cada factor con las reglas habituales para decidir el signo de $h(x)$.

[1] Ojo, no siempre. Por ejemplo, la inecuación $x^2 \leq 0$ tiene como única solución $x = 0$, y la inecuación $x^4 + 5 < 2$ no tiene ninguna solución.

[2] En realidad esto no es tan obvio, y asume ciertas hipótesis sobre la continuidad de la función y un resultado conocido como 'Teorema de Bolzano'. Esto sin embargo es materia de cursos superiores y asumiremos de momento que es un resultado lo suficientemente intuitivo para las funciones continuas que conocemos, como los polinomios.

- Otra forma útil de mirar el problema es estudiar la multiplicidad de cada una de las raíces de los polinomios. Si una raíz de un polinomio tiene multiplicidad par, el signo del polinomio no cambia al atravesarla, mientras que sí lo hará si es impar. Así pues, podemos obtener el signo de $h(x)$ en cada intervalo simplemente evaluando en uno de ellos y estudiando a través de qué raíces cambia o no de signo.

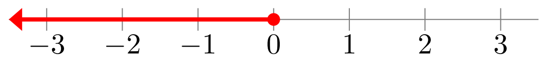
- Una vez decidido los signos de $h(x)$ en cada intervalo sólo nos quedará escoger aquellos que cumplan la desigualdad propuesta, con cuidado de marcar adecuadamente si los extremos están incluidos o no en función del tipo de desigualdad y teniendo en cuenta que las divisiones por cero no están permitidas. En concreto

  - Los valores que anulan el numerador pertenecerán a la solución si la inecuación es no estricta, y no pertenecerán a ella si la inecuación es estricta.
  - Los valores que anulan el denominador nunca pertenecen a la solución, puesto que la operación de división por cero no está definida.

1. Encuentra las soluciones de las siguientes inecuaciones lineales

(a) $x \leq 0$

En este caso la inecuación está básicamente resuelta. Es evidente que el conjunto de números que satisface esta desigualdad es el intervalo $(-\infty, 0]$ o, si lo queremos representar gráficamente



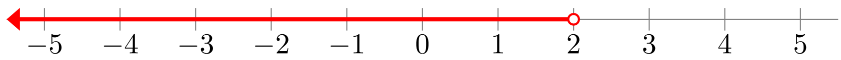
Volver al enunciado

(b) $2x < 4$

Dividiendo a ambos lados de la inecuación por 2 tenemos

$$x < 2 \tag{4}$$

y por tanto la solución será el intervalo $(-\infty, 2)$. Gráficamente



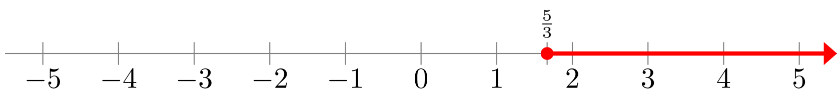
Volver al enunciado

(c) $3x + 2 \geq 7$

Manipulando la expresión con las técnicas habituales

$$\begin{aligned} 3x + 2 &\geq 7 & (5) \\ 3x &\geq 5 & (6) \\ x &\geq \frac{5}{3} & (7) \end{aligned}$$

de modo que la solución es todos los números reales comprendidos en el intervalo $\left[\frac{5}{3}, \infty\right)$



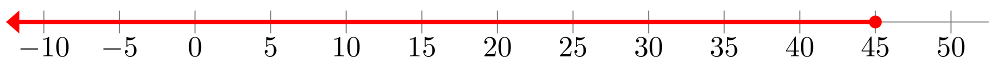
Volver al enunciado

(d) $\dfrac{x}{5} - 1 \leq 8$

Manipulando la expresión con las técnicas habituales

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} - 1 &\leq 8 & (8) \\ \frac{x}{5} &\leq 9 & (9) \\ x &\leq 45 & (10) \end{aligned}$$

de modo que la solución será todos los números reales comprendidos en el intervalo $(-\infty, 45]$



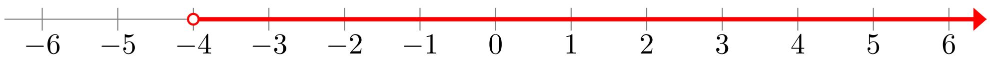
Volver al enunciado

(e) $5x + 1 > x - 15$

Manipulando la expresión con las técnicas habituales

$$5x + 1 > x - 15 \tag{11}$$
$$4x > -16 \tag{12}$$
$$x > -4 \tag{13}$$
$$\tag{14}$$

de modo que la solución será todos los números reales comprendidos en el intervalo $(-4, \infty)$



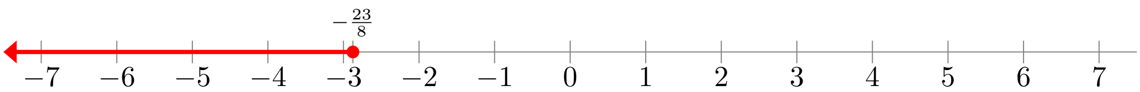
Volver al enunciado

(f) $\dfrac{x-8}{3} \geq 3x + 5$

Manipulando la expresión con las técnicas habituales

$$\frac{x-8}{3} \geq 3x + 5 \tag{15}$$
$$x - 8 \geq 9x + 15 \tag{16}$$
$$-23 \geq 8x \tag{17}$$
$$-\frac{23}{8} \geq x \tag{18}$$

o, lo que es lo mismo, $x \leq -\frac{23}{8}$, de modo que la solución será todos los números reales comprendidos en el intervalo $(-\infty, -\frac{23}{8}]$.



Volver al enunciado

2. Encuentra las soluciones de las siguientes inecuaciones polinómicas de grado 2

(a) $x^2 - 9 \leq 0$

Resolviendo la ecuación $x^2 - 9 = 0$ obtenemos las soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$. Estos valores definen tres intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo del polinomio $x^2 - 9$ en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo en el polinomio o en cada uno de sus factores para observar el signo del producto. En la siguiente tabla mostramos toda la información

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, \infty)$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

Como vemos, el polinomio en cuestión es negativo (y por tanto menor que cero) en el intervalo $(-3, 3)$ y por tanto este rango de valores formará parte de la solución. Como además la inecuación contemplaba el caso $x^2 - 9 = 0$ entonces también los dos extremos formarán parte de la solución y concluimos que la solución será el intervalo $[-3, 3]$.

Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = x^2 - 9$ se encuentra por debajo del eje x en este intervalo, y por encima en los restantes.

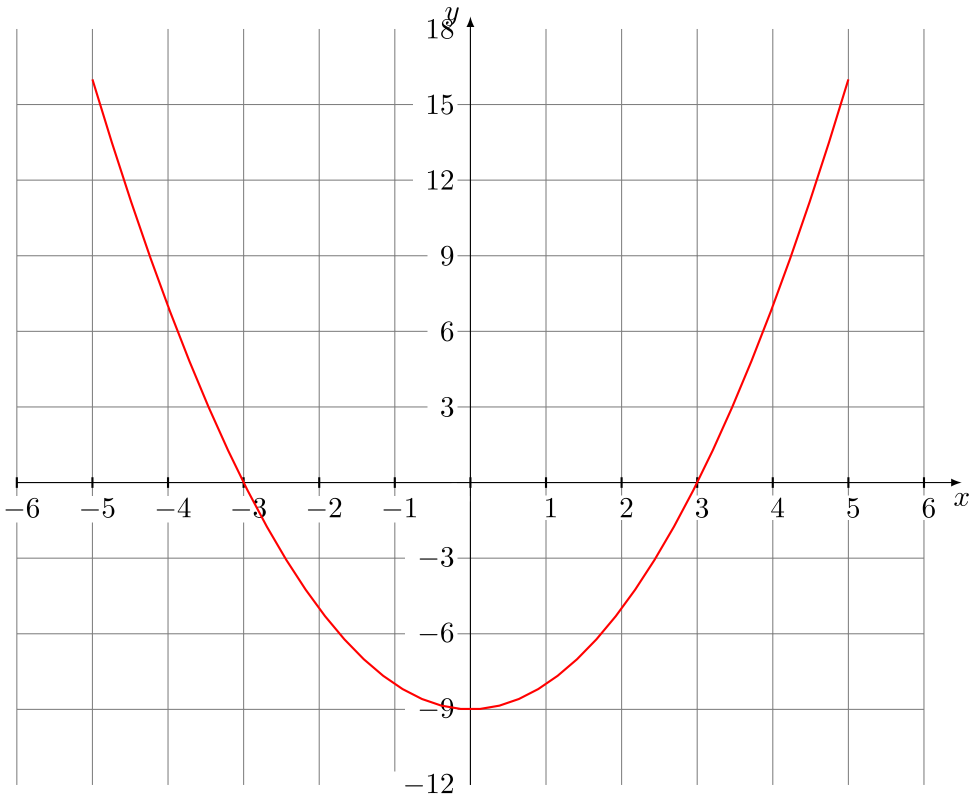


Figure 1: *Representación de la función* $f(x) = x^2 - 9$

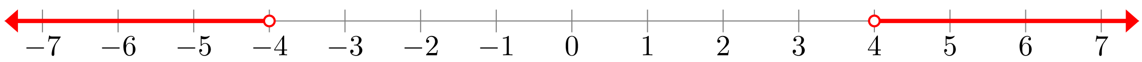
Volver al enunciado

(b) $x^2 - 10 > 6$

Restando 6 a ambos lados obtenemos la desigualdad $x^2 - 16 > 0$, y resolviendo la ecuación $x^2 - 16 = 0$ obtenemos las soluciones $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$. Estos valores definen tres intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo del polinomio $x^2 - 16$ en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo en el polinomio o en cada uno de sus factores para observar el signo del producto. En la siguiente tabla mostramos toda la información

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 4)$	$(4, \infty)$
$(x+4)$	$-$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$	$+$	$-$	$+$

Como vemos, el polinomio en cuestión es positivo (y por tanto mayor que cero) en los intervalos $(-\infty, -4)$ y $(4, \infty)$ y por tanto este rango de valores formará parte de la solución. Como además la inecuación no contemplaba el caso $x^2 - 16 = 0$ los extremos de los intervalos no formarán parte de la solución y concluimos que la solución será $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$.



Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = x^2 - 16$ se encuentra por encima del eje x en los intervalos indicados.

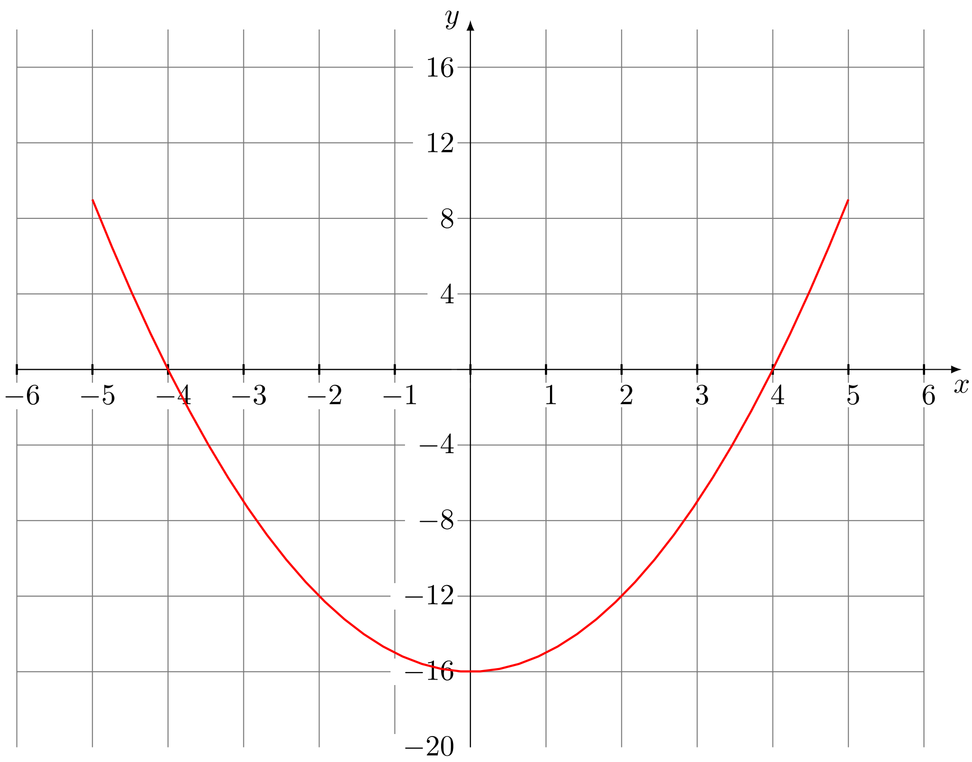


Figure 2: *Representación de la función* $f(x) = x^2 - 16$

Volver al enunciado

(c) $5 - x^2 < 8$

Restando 8 a ambos lados obtenemos la desigualdad $-3 - x^2 < 0$, y resolviendo la ecuación $-3 - x^2 = 0$ encontramos que no tiene solución. Esto nos indica que el signo del polinomio $-3 - x^2$ no cambia a lo largo de la recta real, y por tanto sólo tendrá un signo para todo x. Dando un valor cualquiera es fácil ver que será negativo para cualquier x y por tanto nuestra solución será $\mathbb{R}$ ó $(-\infty, \infty)$.

Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = -3 - x^2$ se encuentra siempre por debajo del eje x.

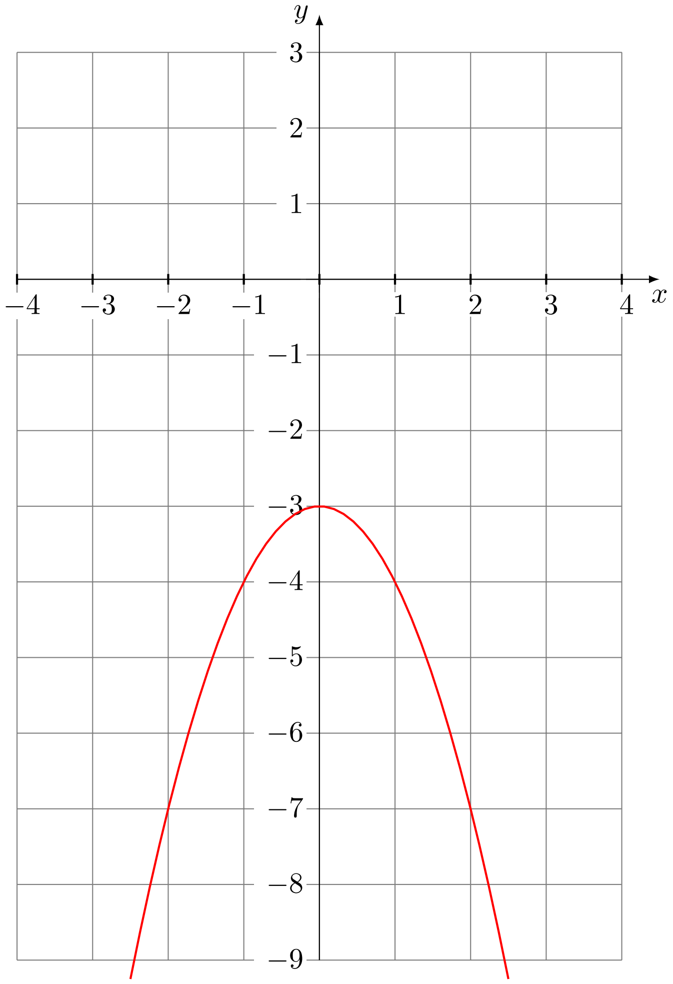


Figure 3: *Representación de la función* $f(x) = -x^2 - 3$

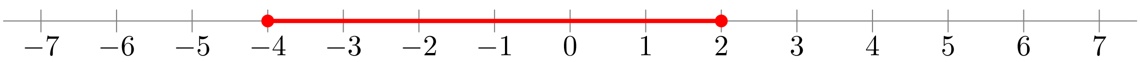
Volver al enunciado

(d) $x^2 - 8 \leq -2x$

Sumando $2x$ a ambos lados obtenemos la desigualdad $x^2 + 2x - 8 \leq 0$, y resolviendo la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$ obtenemos las soluciones $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$. Estos valores definen tres intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo del polinomio $x^2 + 2x - 8$ en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo en el polinomio o en cada uno de sus factores para observar el signo del producto. En la siguiente tabla mostramos toda la información

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 2)$	$(2, \infty)$
$(x+4)$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2)$	$+$	$-$	$+$

Como vemos, el polinomio en cuestión es negativo (y por tanto menor que cero) en el intervalo $(-4, 2)$ y por tanto este rango de valores formará parte de la solución. Como además la inecuación contemplaba el caso $x^2 + 2x - 8 = 0$ los extremos de los intervalos formarán parte de la solución y concluimos que la solución será $[-4, 2]$



Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = x^2 + 2x - 8$ se encuentra por debajo del eje x en el intervalo indicado.

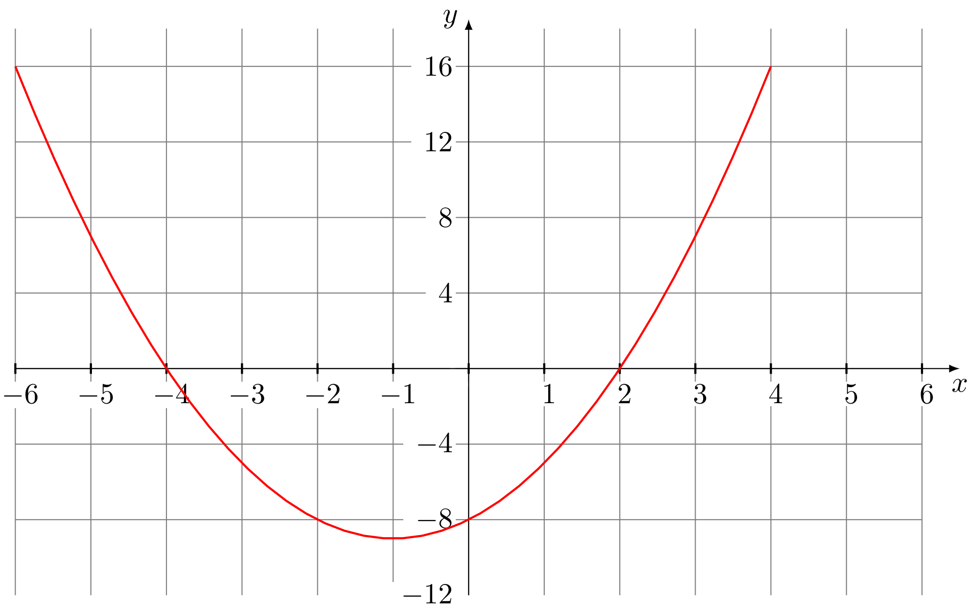


Figure 4: *Representación de la función* $f(x) = x^2 + 2x - 8$

Volver al enunciado

(e) $x^2 + 15 \leq 0$

Resolviendo la ecuación $x^2 + 15 = 0$ encontramos que no tiene solución, lo que significa que el signo del polinomio $x^2 + 15$ será el mismo en toda la recta real. Dando cualquier valor es fácil ver que será postivo, de modo que la inecuación propuesta no tiene solución.

Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = x^2 + 15$ se encuentra por encima del eje x para cualquier x.

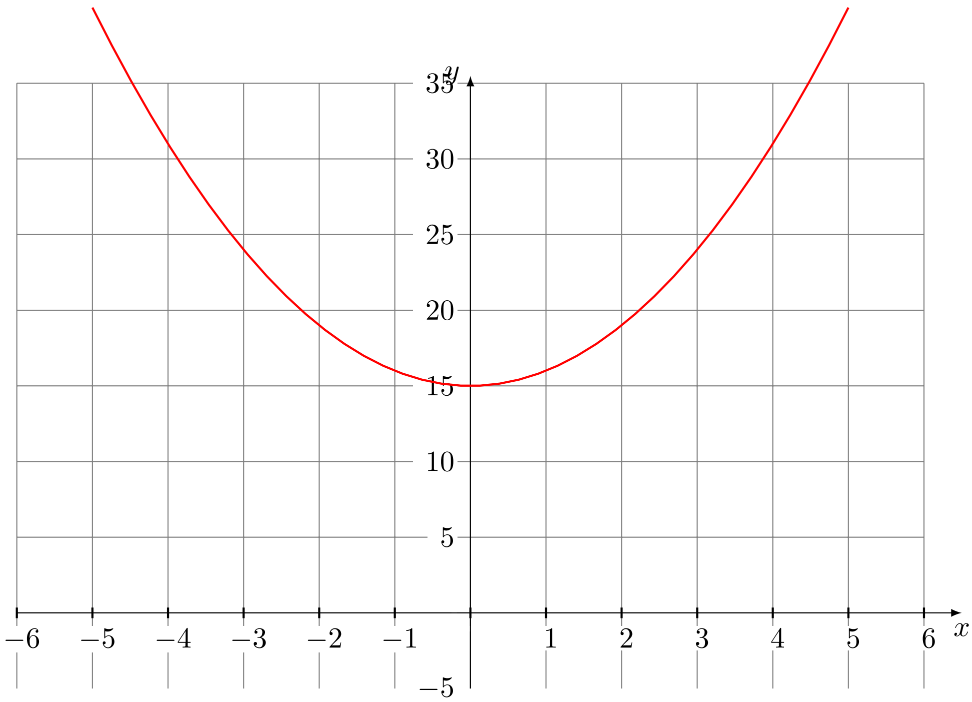
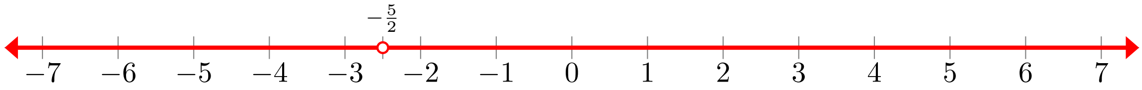


Figure 5: *Representación de la función* $f(x) = x^2 + 15$

Volver al enunciado

(f) $4x^2 + 25 + 20x > 0$

Resolviendo la ecuación $4x^2 + 25 + 20x = 0$ obtenemos una sola solución $x_1 = -5/2$. Este valor define dos intervalos en la recta real, y bastará con estudiar el signo del polinomio $4x^2+25+20x$ en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. En este caso el análsis es muy rápido puesto que la raíz x_1 es doble y por tanto la factorización es $4x^2+25+20x = 4(x+5/2)^2$ y es inmediato que siempre será positivo. Toda la recta real será por tanto solución de la inecuación, pero debemos quitar a x_1 por no estar incluido el valor que satura la desigualdad. La solución por tanto es $\mathbb{R} - \{-5/2\}$, o bien $(-\infty, -5/2) \cup (-5/2, \infty)$.



Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = 4x^2 + 25 + 20x$ se encuentra siempre por encima del eje x, excepto en $x = -5/2$, donde es tangente al eje.

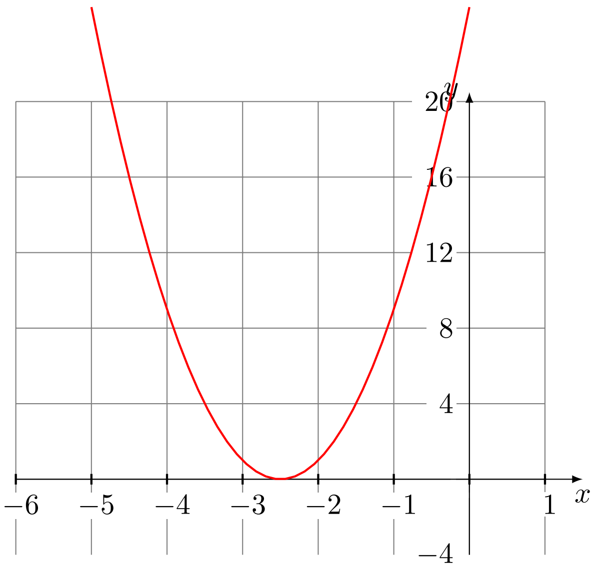


Figure 6: *Representación de la función* $f(x) = 4x^2 + 25 + 20x$

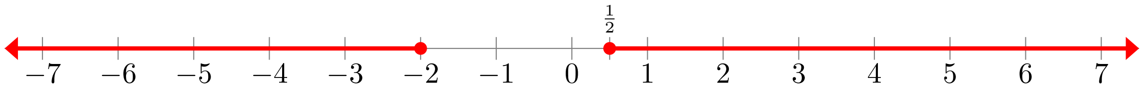
Volver al enunciado

(g) $-6x^2 - 9x + 6 \leq 0$

Resolviendo la ecuación $-6x^2 - 9x + 6 = 0$ obtenemos las soluciones $x_1 = -2$ y $x_2 = 1/2$. Estos valores definen tres intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo del polinomio $-6x^2 - 9x + 6$ en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo en el polinomio o en cada uno de sus factores para observar el signo del producto. En la siguiente tabla mostramos toda la información. Al factorizar el polinomio recuerda que al tener coeficiente principal negativo, el signo del polinomio es el opuesto al del producto de los factores

	$(-\infty, -2)$	$\left(-2, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$\left(x - \frac{1}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$
$-6x^2 - 9x + 6 = -6(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$	$-$	$+$	$-$

Como vemos, el polinomio en cuestión es negativo (y por tanto menor que cero) en el intervalo $(-\infty, -2)$ y en el $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ y por tanto este rango de valores formará parte de la solución. Como además la inecuación contemplaba el caso $-6x^2 - 9x + 6 = 0$ los extremos de los intervalos formarán parte de la solución y concluimos que la solución será $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$



Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = -6x^2 - 9x + 6$ se encuentra por debajo del eje x en los intervalos indicados

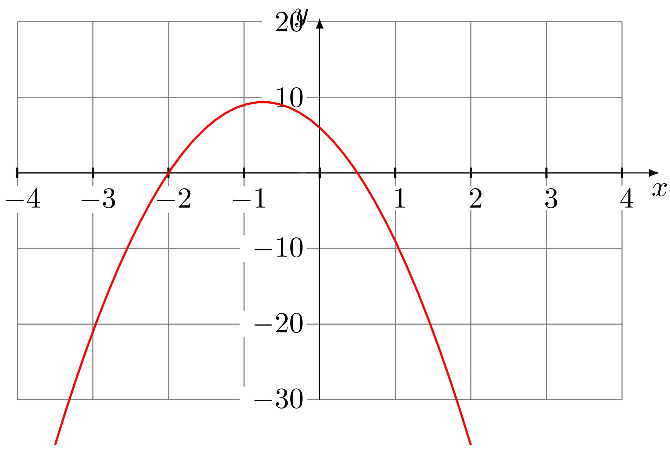


Figure 7: *Representación de la función* $f(x) = -6x^2 - 9x + 6$

Volver al enunciado

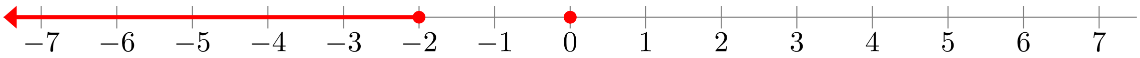
3. Encuentra las soluciones de las siguientes inecuaciones polinómicas de grado mayor a 2

(a) $x^2(x+2) \leq 0$

El polinomio se nos da factorizado, de modo que las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = -2$. Estos valores definen tres intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo del polinomio $x^2(x+2)$ en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo en el polinomio o en cada uno de sus factores para observar el signo del producto. En la siguiente tabla mostramos toda la información

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,\infty)$
x^2	$+$	$+$	$+$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$x^2(x+2)$	$-$	$+$	$+$

Como vemos, la raíz $x = 0$ es doble, por lo que el signo del polinomio no cambia al atravesarla. El polinomio en cuestión es negativo (y por tanto menor que cero) en el intervalo $(-\infty,-2)$ y por tanto este rango de valores formará parte de la solución. Como además la inecuación contemplaba el caso $x^2(x+2) = 0$ entonces también $x = -2$ y $x = 0$ formarán parte de la solución y concluimos que la solución será $(-\infty,-2] \cup \{0\}$.



Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = x^2(x+2)$ se encuentra por debajo del eje x en este intervalo, y por encima en los restantes.

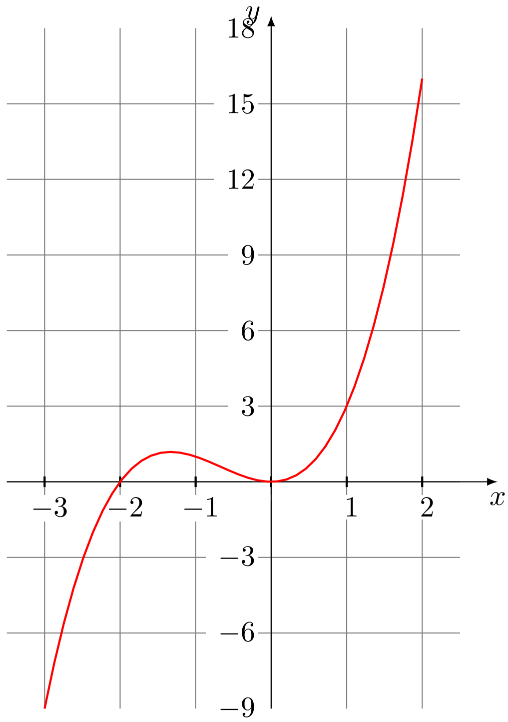


Figure 8: *Representación de la función* $f(x) = x^2(x+2)$

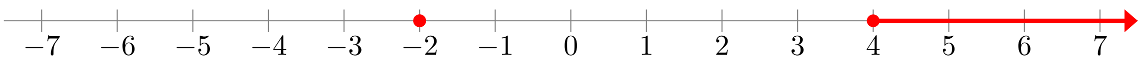
Volver al enunciado

(b) $(x+2)^2(x-4) \geq 0$

El polinomio se nos da factorizado, de modo que las soluciones son $x_1 = -2$ y $x_2 = 4$. Estos valores definen tres intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo del polinomio $(x+2)^2(x-4)$ en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo en el polinomio o en cada uno de sus factores para observar el signo del producto. Observamos además que $x = -2$ es una raíz doble, por lo que el signo del polinomio no cambia al atravesarla. En la siguiente tabla mostramos toda la información

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 4)$	$(4, \infty)$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)^2(x-4)$	$-$	$-$	$+$

Como vemos, el polinomio en cuestión es positivo (y por tanto mayor que cero) en el intervalo $(4, \infty)$ y por tanto este rango de valores formará parte de la solución. Como además la inecuación contemplaba el caso $(x+2)^2(x-4) = 0$ entonces también $x = -2$ y $x = 4$ formarán parte de la solución y concluimos que la solución será $[4, \infty) \cup \{-2\}$.



Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = (x+2)^2(x-4)$ se encuentra por encima del eje x en este intervalo, y por debajo en el resto.

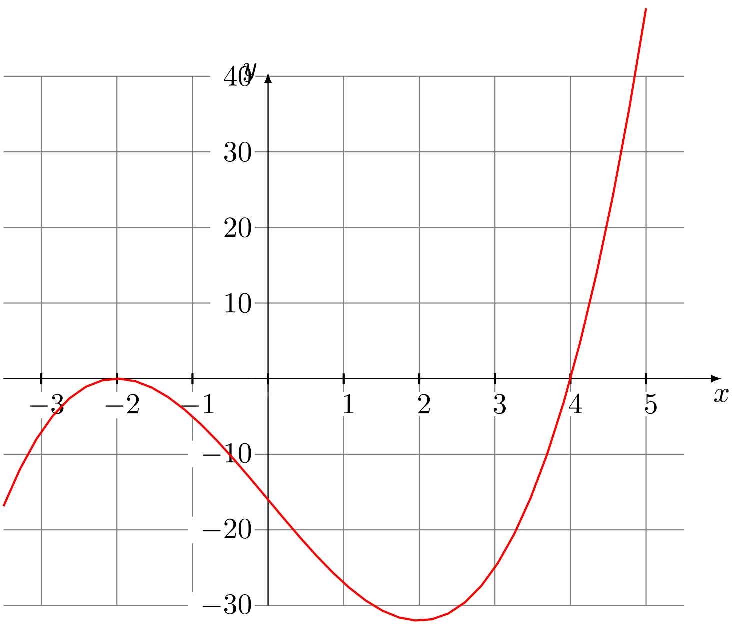


Figure 9: *Representación de la función* $f(x) = (x+2)^2(x-4)$

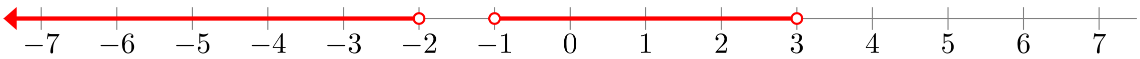
Volver al enunciado

(c) $(x+1)(x-3)(x+2) < 0$

El polinomio se nos da factorizado, de modo que las soluciones son $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 3$. Estos valores definen cuatro intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo del polinomio $(x+1)(x-3)(x+2)$ en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo en el polinomio o en cada uno de sus factores para observar el signo del producto. En la siguiente tabla mostramos toda la información

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-3)(x+2)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Como vemos, el polinomio en cuestión es negativo (y por tanto menor que cero) en los intervalos $(-\infty,-2)$ y $(-1,3)$ y por tanto este rango de valores formará parte de la solución. Como además la inecuación el 'menor que' es estricto, los extremos no formarán parte de la solución y concluimos que la solución será $(-\infty,-2)\cup(-1,3)$



Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = (x+1)(x-3)(x+2)$ se encuentra por debajo del eje x en los intervalos solución y por encima en los restantes.

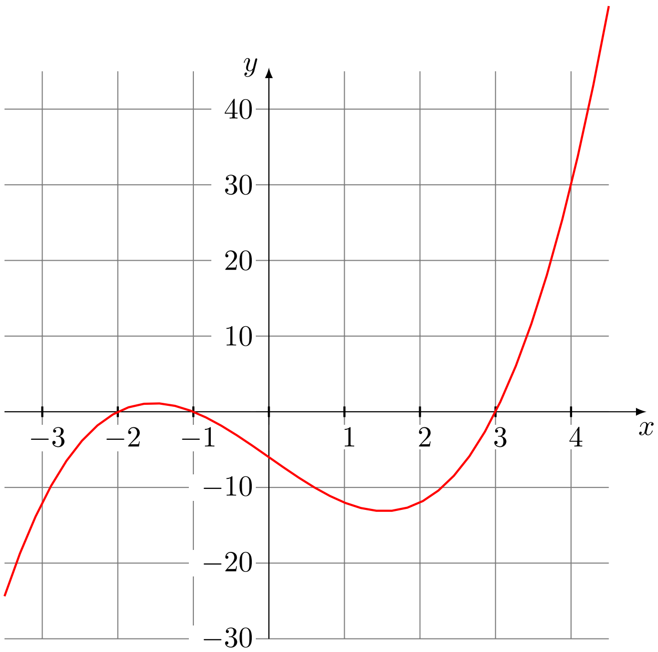


Figure 10: *Representación de la función* $f(x) = (x+1)(x-3)(x+2)$

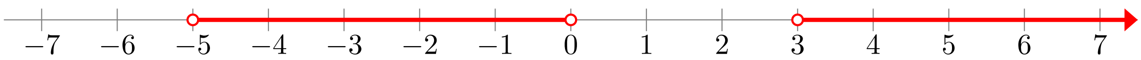
Volver al enunciado

(d) $x(x+5)(x-3) > 0$

El polinomio se nos da factorizado, de modo que las soluciones son $x_1 = -5$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 3$. Estos valores definen cuatro intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo del polinomio $x(x+5)(x-3)$ en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo en el polinomio o en cada uno de sus factores para observar el signo del producto. En la siguiente tabla mostramos toda la información

	$(-\infty,-5)$	$(-5,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$(x+5)$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x(x+5)(x-3)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Como vemos, el polinomio en cuestión es positivo (y por tanto mayor que cero) en los intervalos $(-5,0)$ y $(3,\infty)$ y por tanto este rango de valores formará parte de la solución. Como además la inecuación el 'mayor que' es estricto, los extremos no formarán parte de la solución y concluimos que la solución será $(-5,0)\cup(3,\infty)$



Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = x(x+5)(x-3)$ se encuentra por encima del eje x en estos dos intervalos y por debajo en los restantes.

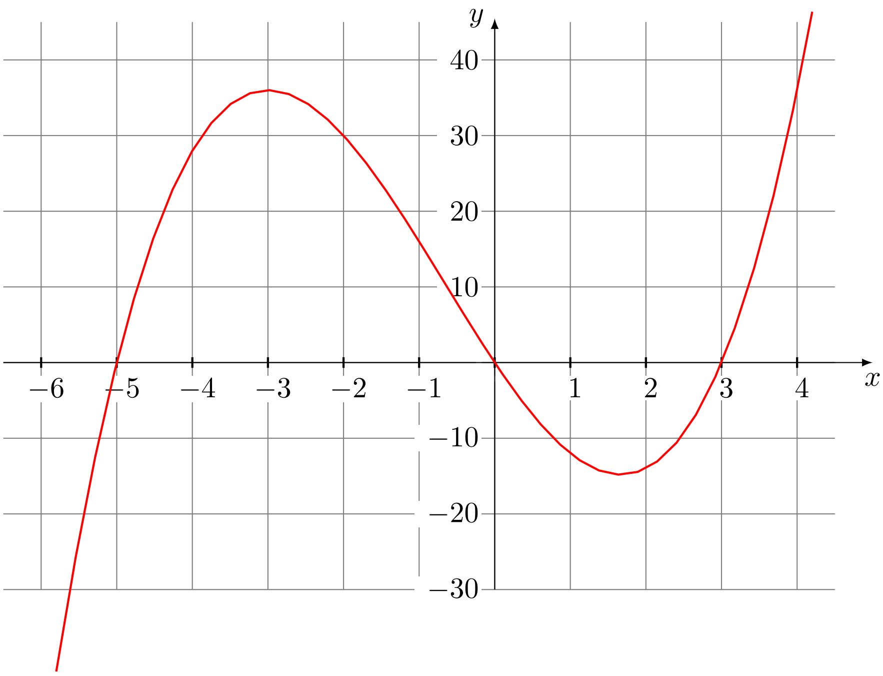


Figure 11: *Representación de la función* $f(x) = x(x+5)(x-3)$

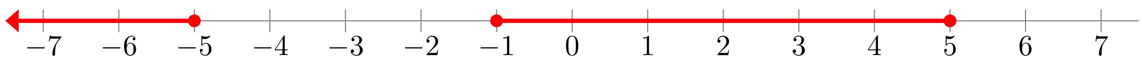
Volver al enunciado

(e) $(x+1)(x^2-25) \leq 0$

El polinomio se nos da parcialmente factorizado, con una solución $x_1 = -1$. Resolviendo la ecuación $x^2 - 25 = 0$ para factorizar esta parte obtenemos las otras dos soluciones $x_2 = 5$ y $x_3 = -5$, con lo que podemos completar la factorización $(x+1)(x-5)(x+5)$. Estos valores definen cuatro intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo del polinomio $(x+1)(x-5)(x+5)$ en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo en el polinomio o en cada uno de sus factores para observar el signo del producto. En la siguiente tabla mostramos toda la información

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -1)$	$(-1, 5)$	$(5, \infty)$
$(x+5)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-5)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-5)(x+5)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Como vemos, el polinomio en cuestión es negativo (y por tanto menor que cero) en los intervalos $(-\infty, -5)$ y $(-1, 5)$ y por tanto este rango de valores formará parte de la solución. Como además la inecuación incluye el caso en que la igualdad se satura, los extremos formarán parte de la solución y concluimos que la solución será $(-\infty, -5] \cup [-1, 5]$



Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = (x+1)(x+5)(x-5)$ se encuentra por debajo del eje x en los intervalos solución y por encima en los restantes.

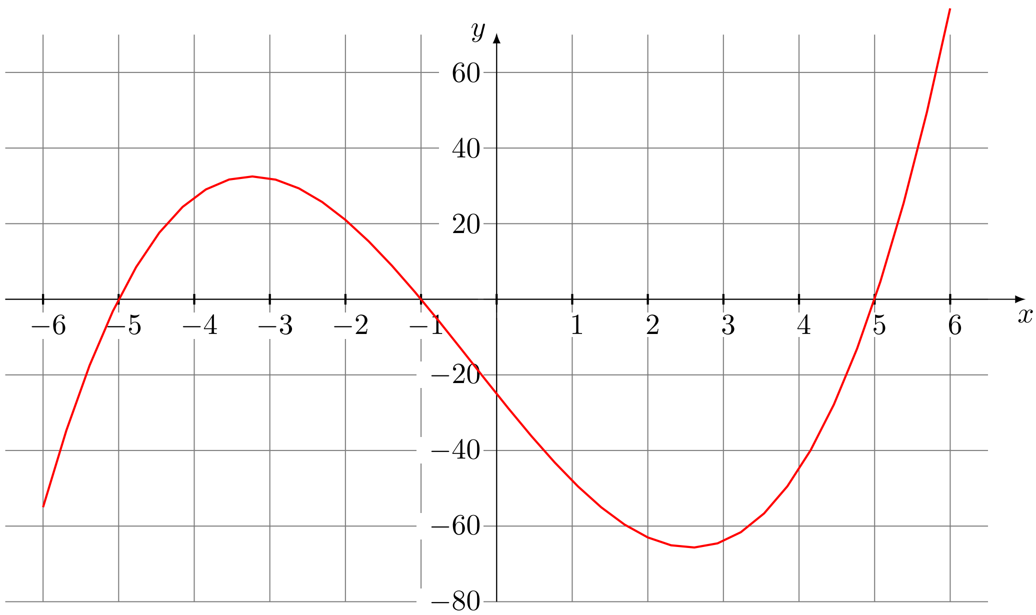


Figure 12: *Representación de la función* $f(x) = (x+1)(x+5)(x-5)$

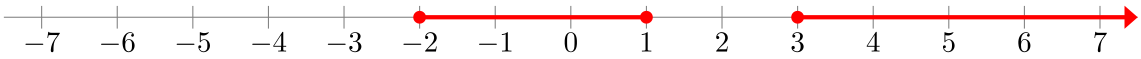
Volver al enunciado

(f) $(1-x)(x^2-x-6) \leq 0$

El polinomio se nos da parcialmente factorizado, con una solución $x_1 = 1$. Resolviendo la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$ para factorizar esta parte obtenemos las otras dos soluciones $x_2 = -2$ y $x_3 = 3$, con lo que podemos completar la factorización $-(x-1)(x+2)(x-3)$. Estos valores definen cuatro intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo del polinomio $-(x-1)(x+2)(x-3)$ en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo en el polinomio o en cada uno de sus factores para observar el signo del producto. En la siguiente tabla mostramos toda la información

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$-(x-1)(x+2)(x-3)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Como vemos, el polinomio en cuestión es negativo (y por tanto menor que cero) en los intervalos $(-2,1)$ y $(3,\infty)$ y por tanto este rango de valores formará parte de la solución. Como además la inecuación incluye el caso en que la igualdad se satura, los extremos formarán parte de la solución y concluimos que la solución será $[-2,1] \cup [3,\infty)$



Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = -(x-1)(x+2)(x-3)$ se encuentra por debajo del eje x en estos dos intervalos y por encima en los restantes.

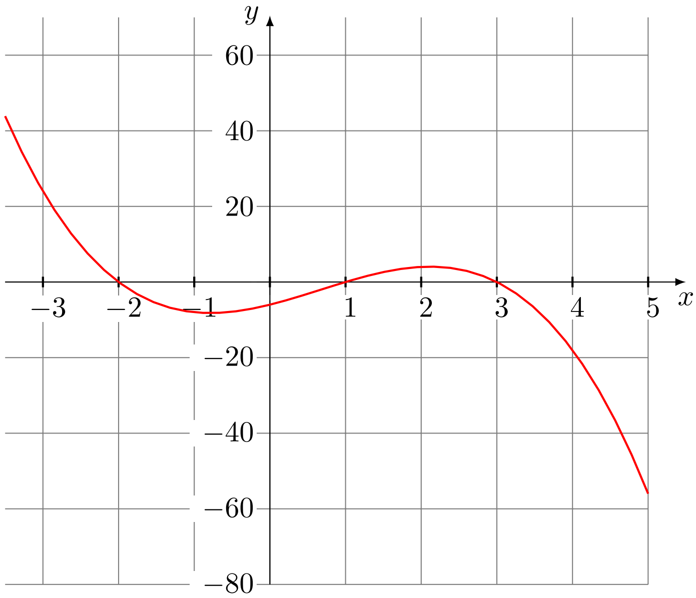


Figure 13: *Representación de la función* $f(x) = -(x-1)(x+2)(x-3)$

Volver al enunciado

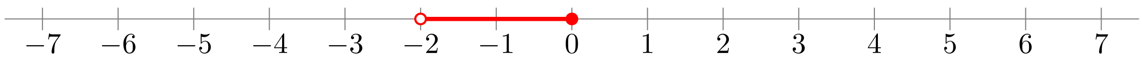
4. Encuentra las soluciones de las siguientes inecuaciones polinómicas de grado mayor a 2

(a) $\dfrac{x}{x+2} \leq 0$

Nos interesa en qué puntos cambian de signo tanto numerador como denominador. Para el numerador tendremos que esto ocurrirá en $x = 0$, mientras que el denominador se anulará en $x = -2$. Estos dos valores definen tres intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo de la fracción algebraica en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo de la expresión o en cada uno de sus factores para observar el signo del cociente. En la siguiente tabla mostramos toda la información

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x}{x+2}$	$+$	$-$	$+$

Como vemos, la fracción algebraica en cuestión es negativa (y por tanto menor que cero) en el intervalo $(-2, 0)$ y por tanto este rango de valores formará parte de la solución. Como además la inecuación contemplaba el caso $\dfrac{x}{x+2} = 0$ tendremos que incluir en la solución el valor que anula el numerador, pero no el que anula el denominador, puesto que no existe la división por cero. Concluimos por tanto que la solución será el intervalo $(-2, 0]$.



Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ se encuentra por debajo del eje x en este intervalo, y por encima en los restantes.

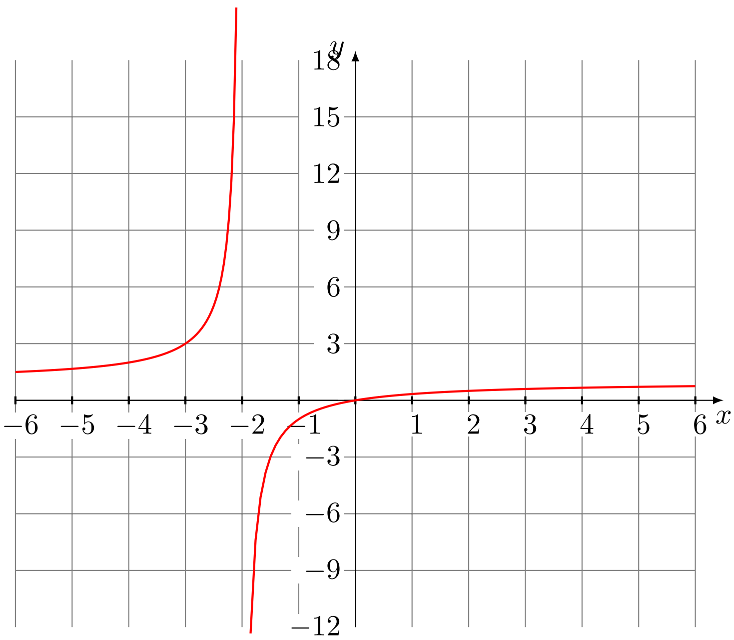


Figure 14: *Representación de la función* $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

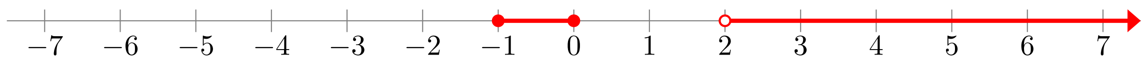
Volver al enunciado

(b) $\dfrac{x(x+1)}{x-2} \geq 0$

Nos interesa en qué puntos cambian de signo tanto numerador como denominador. Para el numerador tendremos que esto ocurrirá en $x = 0$ y $x = -1$, mientras que el denominador se anulará en $x = 2$. Estos tres valores definen cuatro intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo de la fracción algebraica en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo de la expresión o en cada uno de sus factores para observar el signo de la expresión total. En la siguiente tabla mostramos toda la información

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x(x+1)}{x-2}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Como vemos, la fracción algebraica en cuestión es positiva (y por tanto mayor que cero) en el intervalo $(-1,0)$ y en el $(2,\infty)$ y por tanto este rango de valores formará parte de la solución. Como además la inecuación contemplaba el caso $\dfrac{x(x+1)}{x-2} = 0$ tendremos que incluir en la solución aquellos valores que anulan el numerador, pero no el que anula el denominador, puesto que no existe la división por cero. Concluimos por tanto que la solución será $[-1,0] \cup (2,\infty)$.



Gráficamente, esto significa que la función $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x-2}$ se encuentra por encima del eje x en estos intervalos, y por debajo en los restantes.

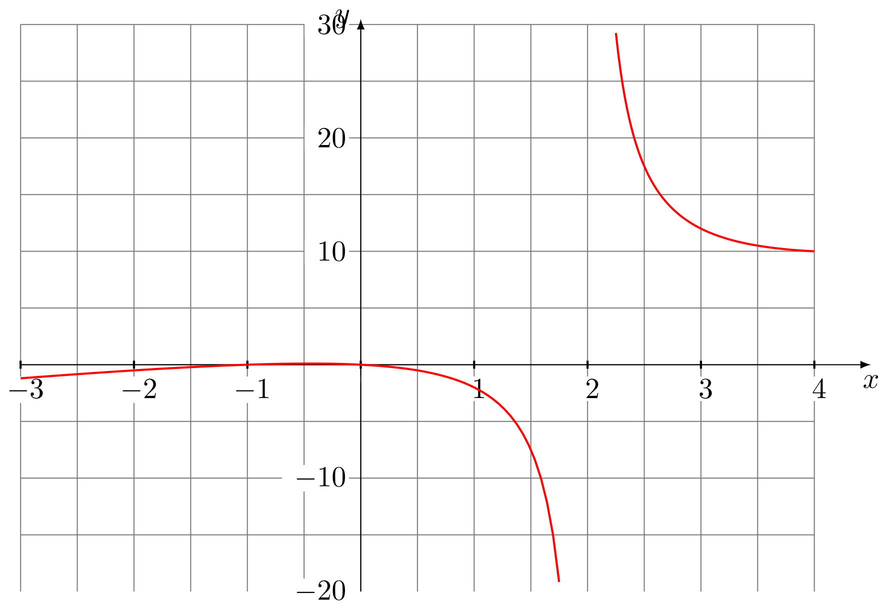


Figure 15: *Representación de la función* $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x-2}$

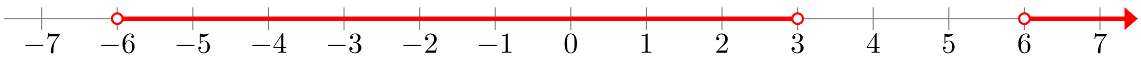
Volver al enunciado

(c) $\dfrac{x^2-36}{3-x}<0$

Nos interesa en qué puntos cambian de signo tanto numerador como denominador. Para el numerador tendremos que esto ocurrirá en $x=6$ y $x=-6$, mientras que el denominador se anulará en $x=3$. Estos tres valores definen cuatro intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo de la fracción algebraica en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo de la expresión o en cada uno de sus factores para observar el signo de la expresión total. En la siguiente tabla mostramos toda la información

	$(-\infty,-6)$	$(-6,3)$	$(3,6)$	$(6,\infty)$
$(x+6)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(x-6)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{(x+6)(x-6)}{3-x}$	$+$	$-$	$+$	$-$

NOTA: Observamos que $3-x=-(x-3)$, lo cual invierte el signo respecto a $(x-3)$.
Como vemos, la fracción algebraica en cuestión es negativa (y por tanto menor que cero) en el intervalo $(-6,3)$ y en el $(6,\infty)$ y por tanto estos intervalos formarán parte de la solución. Como además la inecuación no contemplaba el caso $\dfrac{x^2-36}{3-x}=0$ no incluiremos en la solución aquellos valores que anulan el numerador (ni por supuesto los que anulan el denominador, ya que la división por cero no existe). Concluimos por tanto que la solución será $(-6,3)\cup(6,\infty)$.



Gráficamente, esto significa que la función $f(x)=\dfrac{x^2-36}{3-x}$ se encuentra por debajo del eje x en los intervalos solución, y por encima en los restantes.

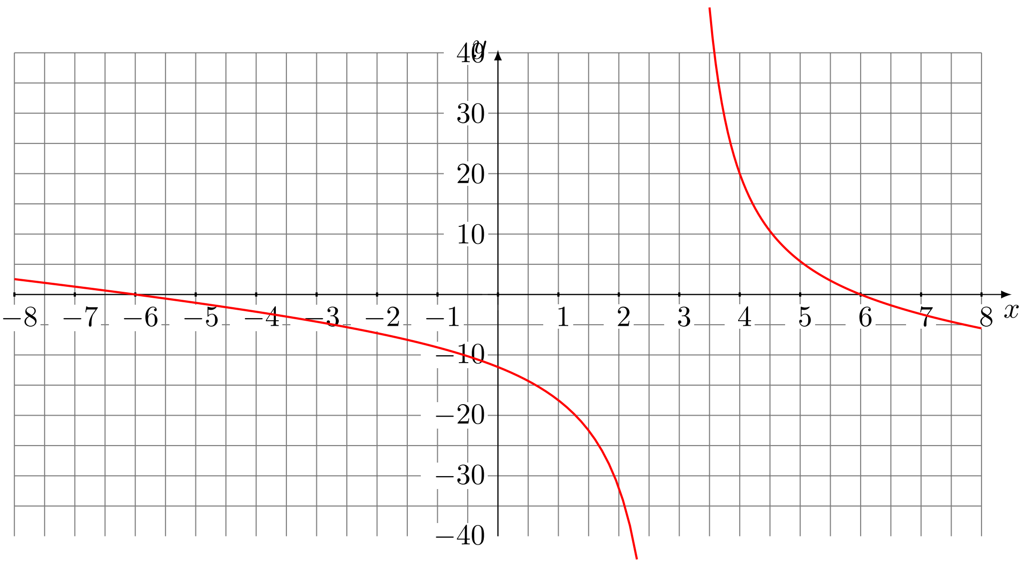


Figure 16: *Representación de la función* $f(x)=\dfrac{x^2-36}{3-x}$

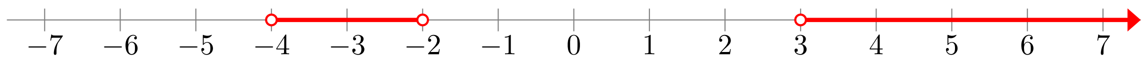
Volver al enunciado

(d) $\dfrac{x^2-x-6}{x+4} > 0$

Nos interesa en qué puntos cambian de signo tanto numerador como denominador. Para el numerador tendremos que esto ocurrirá en $x=-2$ y $x=3$, mientras que el denominador se anulará en $x=-4$. Estos tres valores definen cuatro intervalos en la recta, y bastará con estudiar el signo de la fracción algebraica en cada uno de ellos para decidir cuáles forman parte de nuestra solución. Es posible evaluar directamente el signo de la expresión o en cada uno de sus factores para observar el signo de la expresión total. En la siguiente tabla mostramos toda la información

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,3)$	$(3,\infty)$
$(x+4)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x+2)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{(x+2)(x-3)}{x+4}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Como vemos, la fracción algebraica en cuestión es positiva (y por tanto mayor que cero) en el intervalo $(-4,-2)$ y en el $(3,\infty)$ y por tanto este rango de valores formará parte de la solución. Como además la inecuación no contemplaba el caso $\dfrac{x^2-x-6}{x+4}=0$ no incluiremos en la solución aquellos valores que anulan el numerador (ni por supuesto los que anulan el denominador, ya que la división por cero no existe). Concluimos por tanto que la solución será $(-4,-2)\cup(3,\infty)$.



Gráficamente, esto significa que la función $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x+4}$ se encuentra por encima del eje x en los intervalos solución, y por debajo en los restantes.

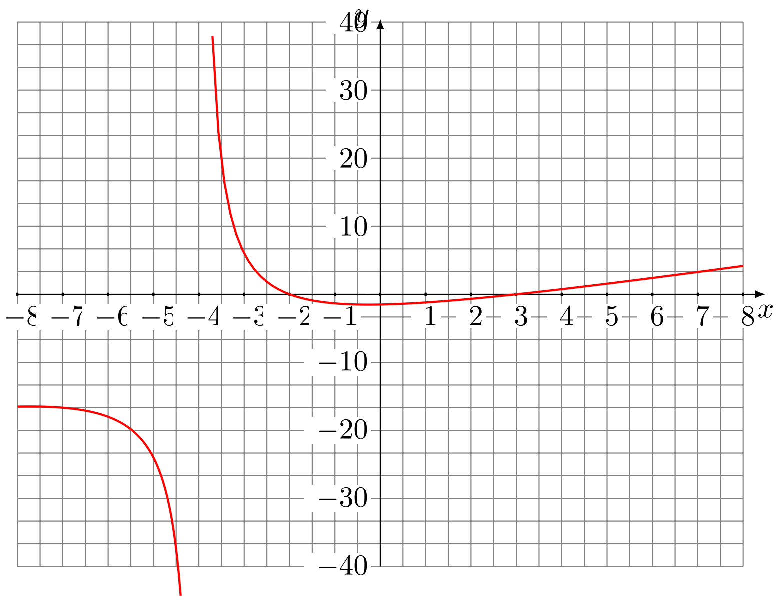


Figure 17: *Representación de la función* $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x+4}$

Volver al enunciado

. .

Documento actualizado el March 20, 2026